LEERBOEK DER MEETKUNDE.

LEERE

DER

MEETK

DOOR

Dr. P. MOLE
Directeur der derde H. B. S. met vijf

TWEEDE, HERZI

TWEEDE D

STEREOM



LEIDEN. — A. W.
1902.

Etch.
J. Adams
9-16-30

VOORBERICHT.

De oorzaken, waaraan dit tweede deel van het „Leerbeek der Meetkunde" zijn ontstaan te danken heeft, zijn reeds in het voorbericht tot het eerste deel medegedeeld. Een enkel woord omtrent den inhoud van dit werk moge hier plaats vinden.

De gekozen leerstof stemt, misschien op een enkele uitzondering na, overeen met hetgeen op de hoogere burgerscholen en de gymnasia onderwezen wordt. Alleen is de constructie van den drievlakshoek, wanneer drie der elementen gegeven zijn, die gewoonlijk in werken over de beschrijvende meetkunde behandeld wordt, in dit leerboek opgenomen. Daar die constructie niet als een toepassing van de leer der projecties beschouwd kan worden, schijnt zij mij toe tot het gebied der stereometrie zelve te behooren. Ook meen ik, dat een hoofdstuk over de voornaamste meetkundige plaatsen in de ruimte niet ontbreken mag.

Bij verschillende onderwerpen is naar de grootst mogelijke kortheid in de behandeling gestreefd, o. a. bij de congruentie en de gelijkvormigheid van viervlakken en veelvlakken.

Het scheen mij niet wenschelijk, ook in dit deel eenige van de nieuwere begrippen der meetkunde in de ruimte op te nemen, eensdeels, omdat het moeilijk is, daarvan geschikte toepassingen te vinden, maar ten anderen ook, omdat de verzwaring der leerstof te aanzienlijk zou worden.

Bij elk hoofdstuk is, evenals in de planimetrie, een aantal met veel zorg gerangschikte vraagstukken gevoegd, naar ik vertrouw, ruim

voldoende, om den leerling de vooral in den aanvang zoo noodige oefening in het „stereometrisch denken" te verschaffen.

Ten slotte wensch ik een woord van dank te brengen aan den heer J. W. TESCH, aan wien ik menige belangrijke opmerking, zoowel met betrekking tot het eerste, als tot dit tweede deel, verschuldigd ben, waardoor een niet onaanzienlijke invloed op den inhoud van beide uitgeoefend is.

P. MOLENBROEK.

VOORWOORD VOOR DEN TWEEDEN DRUK.

De wijzigingen, in deze nieuwe uitgave aangebracht, zijn van denzelfden aard als bij het eerste deel vermeld. Eensdeels bestaan zij dus in het op den voorgrond stellen van den aan de bewijzen ten grondslag liggenden gedachtengang, ten anderen in enkele bijvoegingen, de meer algemeene beschouwingswijze van de gelijkvormigheid en geschiedkundige aanteekeningen. Het eerste hoofdstuk werd eenigszins omgewerkt, ten einde het aan strengheid te doen winnen. De constructie van het vierde geval van den drievlakshoek werd door een meer eenvoudige vervangen. Mogen ook hier die veranderingen verbeteringen blijken te zijn!

P. MOLENBROEK.

INHOUDSOPGAVE.

INHOUDSOPGAVE.

HOOFDSTUK XXVIII.

ALGEMEENE BEGRIPPEN EN EIGENSCHAPPEN.

159. De stereometrie houdt zich bezig met de eigenschappen van figuren in de ruimte.

Volgens het tweede axioma kan door twee punten steeds een rechte gebracht worden en niet meer dan één rechte. Wij kiezen nu als

Axioma IV. *Door drie punten kan steeds een plat vlak gebracht worden.*

en kunnen dan verder bewijzen:

Eigenschap 298. *Door drie, niet op één rechte gelegen punten kan niet meer dan één plat vlak gebracht worden, m. a. w., als twee platte vlakken drie niet op één rechte gelegen punten gemeen hebben, moeten zij geheel samenvallen.*

Gegeven: Twee platte vlakken I en II hebben de punten A, B en C gemeen. Het punt D ligt in het vlak I.

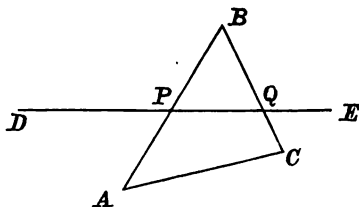


Fig. 311.

Te bewijzen: D ligt in het vlak II.

Bewijs: Wij zullen trachten te bewijzen, dat het punt D op een rechte ligt, die in het vlak II gelegen is. Daartoe verbinde men de punten A, B en C door rechten, dan zullen deze volgens de definitie van het platte vlak zoowel in het vlak I als in het vlak II liggen. Omdat D ook in het vlak I ligt, kan men uit D steeds een rechte DE trekken, die AB en BC snijdt, b. v. in P en Q. Deze twee snijpunten liggen dan in het vlak II, zoodat de geheele rechte PQ, en dus ook het punt D, in het vlak II gelegen zijn moet.

Opmerking: Men kan Eigenschap 298 ook aldus uitdrukken:

Een plat vlak is door drie, niet op één rechte gelegen, punten volkomen bepaald.

Uit het bewijs blijkt, dat men haar ook aldus zou kunnen uitdrukken:

Een plat vlak is door twee snijdende rechten volkomen bepaald;
of eindelijk aldus:

Een plat vlak is door een rechte en een daarbuiten gelegen punt volkomen bepaald.

Men kan namelijk op die rechte steeds twee willekeurige punten aannemen, welke met het gegeven punt een drietal punten vormen, die volgens N° 298 het vlak volkomen bepalen.

De volgende eigenschappen doen kennen, op welke wijze men een plat vlak ontstaan kan denken.

Eigenschap 299. *Een plat vlak is de meetkundige plaats der rechten, die door een vast punt gaan en een gegeven rechte snijden.*

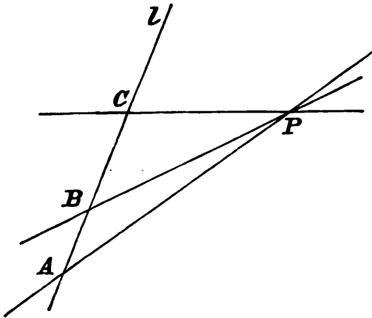


Fig. 312.

Bewijs: Zij P het gegeven punt en l de gegeven rechte, welker punten A, B, ... alle met P vereenigd gedacht worden door middel van ter weerszijden oneindig verlengde rechten. Dan moet bewezen worden, dat deze rechten te zamen een plat vlak vormen.

Volgens Axioma IV kan b. v. door de punten P, A en C een plat vlak U gebracht worden. Daar A en C in U liggen, zal volgens de bepaling van het platte vlak de rechte l in U liggen, dus ook het punt B. Aangezien nu P en B in U liggen, moet ook de rechte PB geheel in U liggen

Eigenschap 300. *Een plat vlak is de meetkundige plaats der rechten, die op twee rechten, welke een punt gemeen hebben, rusten.*

Men zegt, dat een rechte op een andere rust, als zij daarmede een punt gemeen heeft.

Bewijs: Zijn l en m de twee rechten, die het punt P gemeen hebben en AB, CD .... rechten, die op l en m rusten, zoodat deze de punten A, C, ... met l, B, D, ... met m gemeen hebben. Dan moet bewezen worden, dat AB, CD, ... in één plat vlak liggen. Volgens Axioma IV kan steeds een plat vlak U door de punten P, A en B gebracht

worden. Daar P en A in dit vlak liggen, moet volgens de bepaling van een plat vlak, de rechte P A in U liggen en dus ook het punt C. Evenzoo bewijst men, dat D in U ligt en dan ligt volgens dezelfde bepaling ook de rechte C D in U.

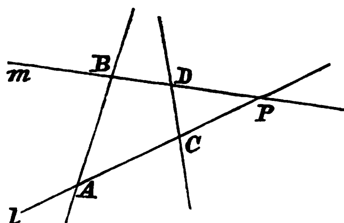


Fig. 313.

160. Een rechte, die niet geheel met een vlak samenvalt, kan, volgens de definitie van het platte vlak in § 3, hoogstens één punt met het vlak gemeen hebben. In dit geval zegt men, dat de rechte het vlak snijdt.

Als daarentegen de rechte en het platte vlak, hoever ook verlengd gedacht, geen enkel punt gemeen hebben, dan worden de figuren evenwijdig met elkander genoemd.

De oneindige ruimte wordt door een plat vlak U in twee deelen verdeeld. Wanneer men nu twee punten A en B in de ruimte aanneemt, dan kunnen daarbij de twee navolgende gevallen onderscheiden worden:

1°. de rechte A B heeft, zonder dat zij aan de zijde van A of van B verlengd wordt, met het vlak U een punt gemeen;

2°. de rechte A B snijdt het vlak U slechts na verlenging.

In het eerste geval zegt men, dat de twee punten aan verschillende zijden van het vlak U gelegen zijn, in het tweede geval, dat A en B aan dezelfde zijde van U liggen.

Als een rechte een vlak snijdt, dan volgt uit het vorige nog, dat punten der rechte, die ter weerszijden van het snijpunt liggen, aan verschillende zijden van het vlak gelegen zijn. Men kan dan ook zeggen, dat de rechte door het vlak in twee deelen verdeeld wordt, die aan verschillende kanten van het vlak liggen.

161. Wanneer twee platte vlakken niet geheel samenvallen, dan kunnen twee gevallen onderscheiden worden:

1°. de platte vlakken kunnen, hoever ook verlengd gedacht, geen enkel punt gemeen hebben. In dit geval worden zij evenwijdig genoemd.

2°. de platte vlakken hebben minstens één punt gemeen. Dan bestaat de stelling:

Eigenschap 301. *Als twee platte vlakken, die niet geheel samenvallen, één punt gemeen hebben, dan hebben zij een door dat punt gaande rechte gemeen.*

Men zegt in dit geval, dat de vlakken elkander in of langs die rechte snijden en noemt die rechte de snijlijn of doorsnede der vlakken.

Gegeven: De vlakken U en V hebben het punt A gemeen.

Te bewijzen: De vlakken hebben een door A gaande rechte gemeen.

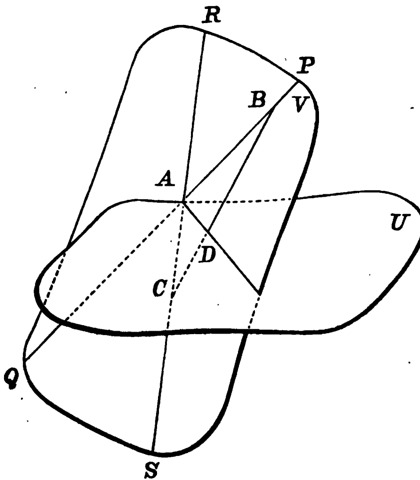


Fig. 314.

Bewijs: Om de eigenschap te bewijzen, zullen wij allereerst aantoonen, dat de platte vlakken behalve het punt A nog een ander punt gemeen hebben. Daartoe trekke men door A twee rechten, P Q en R S, die in het vlak V gelegen zijn. Onderstelt men nu, dat de deelen A P en A S dier rechten aan verschillende zijden van het vlak U gelegen zijn, dan zal de rechte B C, die een punt B van A P met een punt C van A S verbindt, noodzakelijk het vlak U moeten snijden, b. v. in D. Daar B en C in het vlak V liggen, zal de geheele rechte B C, dus ook het snijpunt D, in het vlak V gelegen zijn. Aangezien nu elk der punten A en D aan de vlakken U en V gemeen is, zoo moet de geheele rechte A D aan die vlakken gemeen zijn.

162. Wanneer twee willekeurige rechten *l* en *m* in de ruimte gegeven zijn, dan kan men volgens § 159 door *l* en een willekeurig punt P van *m* steeds één vlak U brengen en nu zijn twee onderstellingen mogelijk:

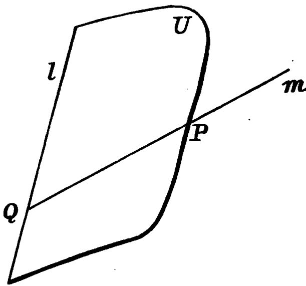


Fig. 315.

1⁰. De rechte *m* ligt geheel in dat vlak U.

Dan kunnen *l* en *m* òf een punt gemeen hebben, òf, hoever ook verlengd, geen enkel punt gemeen hebben. In het eerste geval heeten de rechten *l* en *m* snijdend, in het tweede geval evenwijdig.

E v e n w ij d i g e r e c h t e n zijn dus rechten, die in één plat vlak liggen en, hoever ook verlengd, geen punt gemeen hebben.

2⁰. De rechte *m* ligt niet in dat vlak U. Nu kan aangetoond worden, dat het niet mogelijk is een vlak aan te brengen, dat de rechten *l*

en *m* te gelijk bevat. Immers indien dit mogelijk ware, dan zou in dat vlak zoowel de rechte *l* als het punt P liggen, d. i. dat vlak zou volgens § 159 met U moeten samenvallen, hetgeen tegen de onderstelling strijdt.

De rechten *l* en *m* kunnen in dit geval ook geen punt gemeen hebben, daar zij in het tegenovergestelde geval immers snijdende rechten zouden zijn, waardoor steeds een plat vlak kan gebracht worden.

Wij besluiten dus tot de volgende Eigenschap:

Eigenschap 302. *Als een plat vlak, door een rechte l en een punt van een andere rechte m gebracht, niet de geheele rechte m bevat, dan is het niet mogelijk, door l en m een vlak te brengen en de rechten l en m kunnen ook niet een punt gemeen hebben.*

De rechten *l* en *m* heeten in dit geval kruisend. Kruisende rechten zijn dus lijnen, die geen enkel punt gemeen hebben, terwijl er geen vlak bestaat, dat de beide rechten te gelijk bevat.

163. **Eigenschap 303.** *Door een punt in de ruimte kan men steeds één, maar niet meer dan één rechte trekken, die evenwijdig loopt aan een andere rechte.*

Bewijs: Door de gegeven rechte AB en het gegeven punt P kan volgens § 159 steeds een vlak U gebracht worden en in dat vlak kan volgens de planimetrie steeds een rechte PQ getrokken worden, die evenwijdig met AB loopt. Was er nu nog een tweede rechte PR, door P gaande, evenwijdig met AB mogelijk, dan zou deze volgens de planimetrie niet in het vlak U gelegen kunnen zijn; dan zou echter door PR en AB een ander vlak V moeten gaan, zoodat nu door de rechte AB en het punt P twee vlakken U en V gebracht zouden kunnen worden, wat tegen § 159 strijdt.

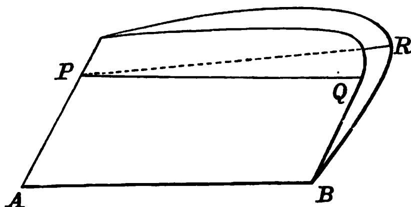


Fig. 316.

Eigenschap 304. *Als één van twee evenwijdigen een vlak snijdt, dan snijdt ook de andere dat vlak.*

Gegeven: AB || CD.

AB heeft met het vlak U het punt B gemeen.

Te bewijzen: CD snijdt het vlak U.

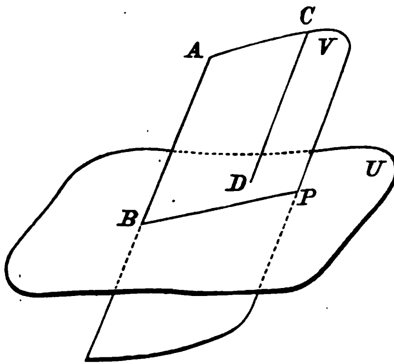


Fig. 317.

Bewijs: Wij zullen trachten deze eigenschap met behulp van N° 12 te bewijzen. Daartoe doen wij opmerken, dat door AB en CD volgens de bepaling van evenwijdige rechten een vlak V kan gebracht worden en daar dit vlak met het vlak U het punt B gemeen heeft, zoo hebben de vlakken U en V volgens N° 301 een rechte BP gemeen. Nu zal echter volgens N° 12 CD de rechte BP en dus ook het vlak U moeten snijden.

Eigenschap 305. ***Twee rechten, die evenwijdig zijn met een derde, zijn evenwijdig.***

Gegeven: $c \parallel a,\ c \parallel b$.

Te bewijzen: $a \parallel b$.

Bewijs: Wij zullen in dit geval moeten bewijzen, dat *a* en *b* in één vlak liggen en geen punt gemeen kunnen hebben. Nu kan men steeds een vlak U brengen door de rechte *a* en een willekeurig punt P van *b*; dan zijn twee onderstellingen mogelijk: 1°. de rechte *b* ligt niet in het vlak U, 2°. het vlak U bevat *b* geheel. Indien wij nu de eerste onderstelling maken, dan heeft *b* dus met het vlak U het punt P gemeen, maar daar volgens het gegevene $c \parallel b$ is, zoo moet volgens N° 304 *c* ook een punt met het vlak U gemeen hebben en daar verder volgens het onderstelde $a \parallel c$ loopt, moet dan ook de rechte *a* het vlak U snijden, wat onmogelijk is. Dus blijft slechts de onderstelling over, dat de rechte *b* geheel in het vlak U ligt, zoodat *b* nu òf evenwijdig met *a* zijn moet òf *a* zal snijden. Was echter dit laatste het geval, dan zouden door dat snijpunt twee rechten *a* en *b* loopen, die volgens het gegevene beide evenwijdig met *c* zijn, hetgeen tegen N° 303 strijdt. Het is dus alleen mogelijk, dat $b \parallel a$ is.

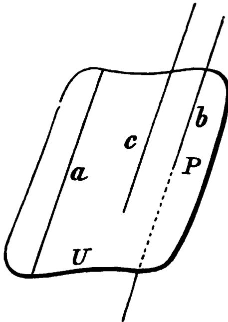


Fig. 318.

Eigenschap 306. ***Als de beenen van een hoek evenwijdig zijn met die van een anderen, dan zijn die hoeken òf gelijk òf elkanders supplementen.***

Wij bewijzen hier slechts één van de beide gevallen.

Gegeven: $BA \parallel ED$, $BC \parallel EF$.

Te bewijzen: $\angle ABC = \angle DEF$.

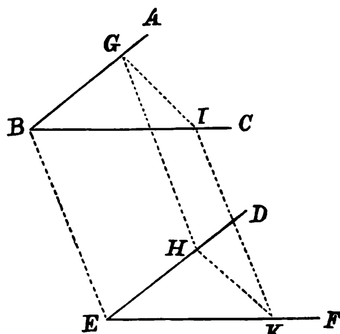


Fig. 319.

Bewijs: Wij zullen nu trachten twee congruente $\triangle\,\triangle$ te vormen, waarin de gegeven hoeken voorkomen, en nemen daartoe op B A en E D twee willekeurige, doch gelijke stukken B G en E H en evenzoo op B C en E F de gelijke stukken B I en E K; vereenigt men daarna B, G en I respectievelijk met E, H en K, dan is B G H E een parallelogram, omdat B G en E H gelijk en evenwijdig zijn. Derhalve is ook

B E gelijk en evenwijdig aan G H . . . . (1)

Evenzoo is dan B I K E een parallelogram, omdat B I gelijk en evenwijdig met E K is, dus is ook

B E gelijk en evenwijdig met I K . . . . (2)

Uit (1) en (2) volgt nu, dat $GH =$ en $\parallel IK$ is, zoodat de vierhoek G H K I een parallelogram en dus $GI = HK$ is. Nu is echter

$$\triangle BGI \cong \triangle EHK,$$

omdat zij de drie zijden gelijk hebben, en dus

$$\angle GBI = \angle HEK.$$

Eigenschap 307. *Trekt men door de punten eener rechte lijn rechten, die evenwijdig loopen aan een tweede gegeven rechte, dan liggen al die evenwijdigen in hetzelfde vlak.*

Het is voldoende aan te toonen, dat een willekeurige evenwijdige in het platte vlak ligt, dat door twee willekeurige andere evenwijdigen gebracht kan worden.

Gegeven: $PP_1 \parallel CD$, $QQ_1 \parallel CD$, $RR_1 \parallel CD$.

Te bewijzen: PP_1, QQ_1, RR_1 liggen in één vlak.

Bewijs: Uit het gegevene, in verband met N° 305, volgt

$$PP_1 \parallel QQ_1 \text{ en } PP_1 \parallel RR_1.$$

Dus kan door PP_1 en QQ_1 een vlak U gebracht worden, dat de rechte A B bevatten moet, omdat de punten P en Q van A B in dat vlak liggen. Evenzoo kan door PP_1 en RR_1 een vlak gebracht worden, dat A B bevatten zal. Deze twee vlakken hebben dan de snijdende rechten A B en PP_1 gemeen en moeten dus volgens § 159 samenvallen, m. a. w. PP_1, QQ_1 en RR_1 liggen in één vlak.

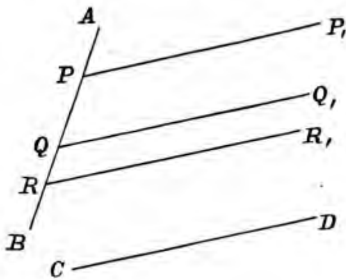


Fig. 320.

Opmerking: Deze eigenschap kan beschouwd worden als een bijzonder geval van N° 299 door hieraan de onderstelling toe te voegen, dat het gegeven punt op oneindigen afstand ligt.

164. In de planimetrie hebben wij de bepaling gegeven van een hoek, door twee snijdende rechten gevormd. In het vervolg zullen wij ook spreken van den hoek tusschen twee kruisende rechten. Duidt men deze rechten door l en m aan, dan kan men volgens N° 303 steeds door een willekeurig punt P′ van l een rechte m' trekken, die $\| m$ is en den hoek tusschen l en m' bepalen. Kiest men een ander punt P″ van l en trekt hierdoor $m'' \| m$, dan liggen volgens de vorige eigenschap l, m' en m'' in één plat vlak en daar volgens N° 305 $m' \| m''$ is, zal de hoek tusschen l en m' gelijk zijn aan dien tusschen l en m''.

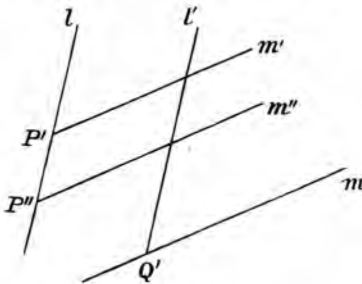


Fig. 321.

Had men echter een punt Q′ op m aangenomen en hierdoor een rechte $l' \| l$ getrokken, dan zou volgens N° 306 evenzeer de hoek tusschen l' en m gelijk zijn aan dien tusschen l en m'.

Onder den hoek tusschen twee kruisende rechten verstaan wij nu den hoek, gevormd door één van beide en een rechte, die uit een punt van die eerste evenwijdig met de andere getrokken wordt.

Indien de hoek tusschen twee kruisende rechten recht is, dan zegt men, dat die rechten elkander loodrecht kruisen, terwijl de uitdrukkingen loodrecht snijden en loodrecht kruisen in „loodrecht staan" samengevat zullen worden.

Vraagstukken.

720. Alle rechten, die door een gegeven punt gaan en een gegeven rechte snijden, liggen in een plat vlak. Bewijs deze stelling.

721. Als een rechte een vlak ontmoet in een punt buiten een in het vlak gelegen rechte, dan moeten die twee rechten elkander kruisen. Bewijs dit.

722. Trekt men door een punt buiten het vlak van twee snijdende rechten een lijn evenwijdig aan een dier rechten, dan moet zij de andere kruisen.

723. Als twee vlakken elkander snijden en een rechte in het eene vlak loopt evenwijdig aan de doorsnede, dan kan zij het andere vlak niet snijden. Gevraagd het bewijs.

724. Hoe kan een rechte geconstrueerd worden, die door een gegegeven punt gaat en twee willekeurige kruisende rechten snijdt?

725. Construeer een rechte, die drie gegeven rechten snijdt. Hoeveel rechten voldoen aan de vraag?

726. Als drie vlakken door één rechte gaan, dan snijden zij van twee willekeurige evenwijdigen evenredige stukken af.

727. Geef de analyse van het werkstuk: Een rechte te construeeren, die twee gegeven kruisende rechten snijdt en evenwijdig is met een derde gegeven rechte.

HOOFDSTUK XXIX.

LOODRECHTE STAND VAN EEN RECHTE EN EEN PLAT VLAK.

165. Door een willekeurige rechte l kan men oneindig vele platte vlakken brengen, en in elk dier vlakken kan men volgens de planimetrie in een bepaald punt van l een loodlijn op l trekken. In één punt eener rechte zijn dus oneindig vele loodlijnen op die rechte mogelijk. Wij kunnen nu bewijzen:

Eigenschap 308. ***Als een rechte in hetzelfde punt loodrecht gesneden wordt door twee andere, dan staat zij loodrecht op elke rechte, die in het vlak der beide laatste rechten ligt.***

Wij bewijzen vooreerst, dat de eerste rechte loodrecht staat op elke rechte, die door het snijpunt met de beide loodrechte lijnen in het vlak dezer laatste getrokken wordt.

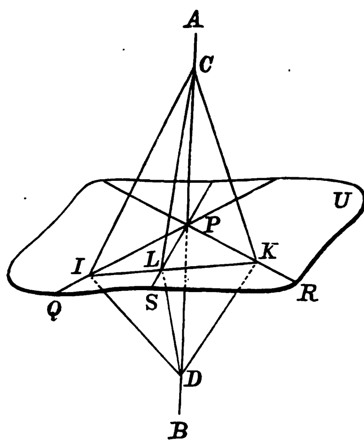


Fig. 322.

Gegeven: $AB \perp PQ$,
$AB \perp PR$;
het vlak U bevat PQ, PR en PS.

Te bewijzen: $AB \perp PS$.

Bewijs: Ten einde het gestelde aan te toonen, zullen wij de gelijkheid der hoeken SPA en SPB trachten te bewijzen en hiertoe een der eigenschappen in § 36 genoemd, toepassen. Men mete daarom op AB ter weerszijden van P de gelijke, overigens willekeurige, stukken PC en PD af en neme op PS een willekeurig punt L aan, dan zal men tot het gestelde kunnen besluiten, indien men weet, dat $LC = LD$ is.

Om nu deze rechten in verband met de gegeven rechten PQ en PR te

brengen, trekke men door L een rechte in het vlak U, die P R b.v. in I en P R in K snijdt en verbinde I en K zoowel met C als met D. Dan deelt Q P, zoowel als R P, de rechte C D loodrecht middendoor, dus is

$$IC = ID \text{ en } KC = KD,$$

derhalve

$$\triangle ICK \cong \angle IDK,$$

waaruit volgt

$$\angle CIK = \angle DIK.$$

Nu is

$$\triangle CIL \cong \triangle DIL,$$

daar zij twee zijden en den ingesloten hoek gelijk hebben, dus is $LC = LD$ en daar de punten L en D nu in het vlak L C D even ver van C als van D liggen, moet L P de rechte C D loodrecht middendoor deelen, derhalve $LP \perp AB$.

Dat A B elke in het vlak U gelegen, niet door P gaande, rechte *l* loodrecht kruist, blijkt nu onmiddellijk in verband met de vorige §, indien men uit P een rechte evenwijdig aan *l* trekt.

Verder ziet men gemakkelijk de waarheid van de volgende meer algemeene stelling in:

Eigenschap 309. *Staat een rechte loodrecht op twee willekeurige snijdende rechten van een vlak, dan staat zij loodrecht op alle rechten in dat vlak.*

Dientengevolge heeft men de volgende spreekwijze ingevoerd:

Als een rechte loodrecht staat op twee willekeurige snijdende rechten van een vlak, dan zegt men, dat die rechte loodrecht op het vlak staat.

166. **Eigenschap 310.** *Alle loodlijnen, in een punt eener rechte op die rechte getrokken, liggen in een plat vlak.*

Het is voldoende aan te toonen, dat een willekeurige loodlijn ligt in het vlak, door twee bepaalde, doch willekeurige loodlijnen gebracht.

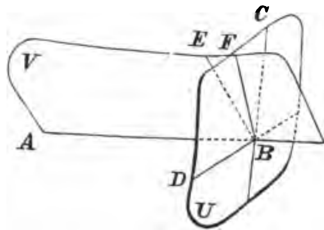


Fig. 323.

Gegeven:

$BC \perp AB$, $BD \perp AB$, $BE \perp AB$.

Te bewijzen: B E ligt in het vlak, door B C en B D gebracht.

Bewijs: Onderstel, dat B E niet lag in het vlak U, door B C en B D gebracht. Legde men dan een vlak V door A B en B E, dan zou dit met U het punt B, dus volgens N⁰ 301 een rechte B F gemeen hebben. Dan zou evenwel, omdat gegeven is, dat

A B loodrecht staat op twee rechten B C en B D in het vlak U, volgens N° 308 $\angle$ A B F ook 90° moeten zijn, terwijl gegeven is, dat $\angle$ A B E 90° bedraagt. *In het vlak* V zouden dus in hetzelfde punt B twee loodlijnen op A B getrokken kunnen worden, hetgeen onmogelijk is; dus moet B E in het vlak C B D liggen.

Eigenschap 311. *In een punt eener rechte kan men steeds één, maar ook niet meer dan één, vlak loodrecht op die rechte aanbrengen.*

Bewijs: Zij A B de gegeven rechte. Legt men door A B twee vlakken en trekt men in elk dezer een loodlijn B C en B D op A B, dan zal het vlak C B D of U volgens N° 308 loodrecht op A B staan.

Fig. 324.

Stel nu, er was nog een ander vlak V in hetzelfde punt B loodrecht op A B mogelijk. Dan zou een willekeurig door A B gaand vlak W de twee vlakken U en V volgens twee rechten B E en B F snijden, terwijl A B dan in dat vlak W loodrecht op A E en op B F zou staan, omdat A B $\perp$ het vlak U en $\perp$ het vlak V is. Dit nu is onmogelijk, dus kan geen tweede vlak in B loodrecht op A B aangebracht worden.

Eigenschap 312. *In elk punt van een vlak kan steeds één, doch ook niet meer dan één, loodlijn op dat vlak getrokken worden.*

Bewijs: Zij W het gegeven vlak en P het gegeven punt daarin.

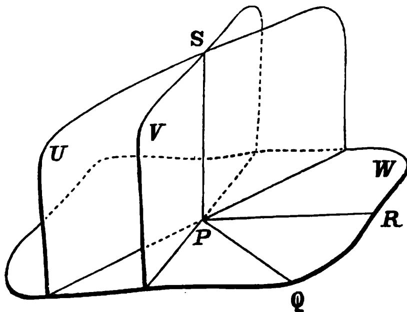


Fig. 325.

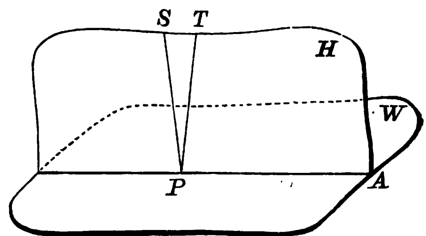


Fig. 326.

Men kan nu steeds door P in het vlak W twee willekeurige rechten P Q en P R trekken en op elk dezer in P een vlak loodrecht plaatsen, zoodat het vlak U $\perp$ P Q en het vlak V $\perp$ P R is. Deze vlakken hebben het punt P gemeen en moeten dus volgens N° 301 een rechte P S gemeen

hebben. Maar dan is P Q ⊥ P S, omdat P Q ⊥ het vlak U is en P R ⊥ P S, omdat P R ⊥ het vlak V is, dus is P S loodrecht op twee rechten van het vlak W en derhalve volgens N° 308 ook op het vlak W.

Om nu te bewijzen, dat in het punt P geen andere rechte dan P S loodrecht op het vlak W kan staan, hebben wij slechts op te merken, dat, als zulks b.v. met P T het geval was (fig. 326), door P S en P T een vlak H gelegd zou kunnen worden, dat W moest snijden, b.v. volgens P A, en dan zouden de beide rechten P S en P T *in hetzelfde vlak* H loodrecht staan op de rechte P A van dat vlak.

Eigenschap 313. *Als één van twee evenwijdigen loodrecht staat op een vlak, dan staat de andere ook loodrecht daarop.*

Gegeven:

P Q || R S, P Q ⊥ het vlak U.

Te bewijzen: R S ⊥ het vlak U.

Bewijs: Men heeft slechts te bewijzen, dat R S loodrecht staat op twee rechten, in het vlak U gelegen. Trekt men nu b.v. door het snijpunt T van P Q met het vlak U twee willekeurige rechten T A en T B, die in U liggen, dan is volgens het onderstelde

∟ P T A = 1 R.

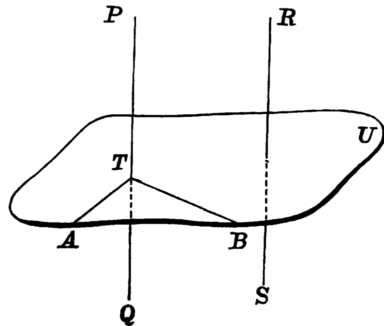


Fig. 327.

Maar volgens § 164 is de hoek tusschen R S en T A gelijk aan dien tusschen P Q en T A en dus is

R S ⊥ T A.

Op dezelfde wijze toont men aan, dat R S ⊥ T B is.

Eigenschap 314. *Twee rechten, die loodrecht staan op hetzelfde vlak, zijn evenwijdig.*

Gegeven: P Q ⊥ het vlak U,
R S ⊥ het vlak U.

Te bewijzen: P Q || R S.

Bewijs: Indien R S niet || P Q was, dan zou men steeds door haar snijpunt T met het vlak U een rechte T L || P Q kunnen trekken, die dan volgens N° 313 loodrecht op het vlak U zou moeten staan. Dan zouden echter in het punt T twee loodlijnen op het vlak U

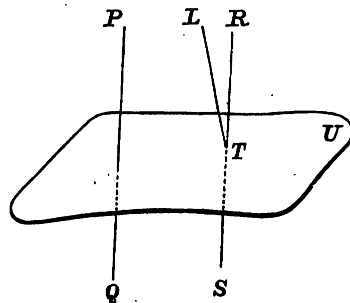


Fig. 328.

opgericht kunnen worden, wat tegen N° 312 strijdt. Derhalve is R S || P Q.

Eigenschap 315. ***Uit een punt buiten een vlak kan steeds één, doch niet mèer dan één loodlijn op dat vlak getrokken worden.***

Bewijs: Zij U het gegeven vlak en P het gegeven punt. Om nu uit P een loodlijn op het vlak U te verkrijgen, kan men volgens N° 312 in een willekeurig punt A van het vlak U een loodlijn A B op dat vlak oprichten en daarna uit P een rechte P Q || A B trekken; P Q is dan volgens N° 313 loodrecht op het vlak U.

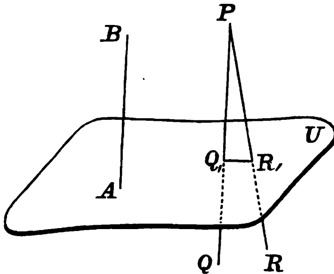


Fig. 329.

Wanneer nu nog een tweede loodlijn P R uit P op hetzelfde vlak mogelijk was, dan zou, als men de snijpunten Q_1 en R_1 van P Q en P R met het vlak U verbond, een driehoek P Q_1 R_1 met twee rechte hoeken verkregen zijn, omdat P Q_1 en P R_1 beide loodrecht op Q_1 R_1 zijn moeten, daar die rechten volgens de onderstelling loodrecht op het vlak U staan.

Er is dus geen andere loodlijn dan P Q uit het punt P op het vlak U mogelijk.

167. Uit al het vorige blijkt, dat een plat vlak volkomen bepaald is, indien zoowel de richting als de lengte van de loodlijn, uit een punt buiten het vlak daarop neergelaten, gegeven zijn.

Gewoonlijk noemt men de loodlijn, op een vlak opgericht of neergelaten, de normaal tot het vlak.

Men is ook wel gewoon te zeggen, dat de normaal de richting van het vlak aangeeft.

168. Onder de orthonale projectie van een punt op een vlak verstaat men het voetpunt der loodlijn, uit dat punt op het vlak neergelaten.

Dikwijls spreekt men eenvoudig van de projectie van het punt op het vlak.

De projectie van een lijn op een vlak is de meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen, uit de punten van die lijn op het vlak neergelaten.

Evenzoo verstaat men onder de projectie van een vlak of van een lichaam op een vlak de meetkundige plaats van de voetpunten der loodlijnen, uit de punten dier figuur op het vlak neergelaten.

Eigenschap 316. ***De projectie van een rechte op een plat vlak is en rechte.***

Bewijs: Zij U het gegeven vlak, A B de gegeven rechte, dan heeft men aan te toonen, dat de voetpunten A_1, B_1, C_1... der loodlijnen AA_1, BB_1, CC_1..., uit de punten van A B op het vlak U neergelaten, in een rechte liggen. Nu is volgens N⁰ 314 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$... en omdat A, B, C... op een rechte liggen, moeten AA_1, BB_1, CC_1... volgens N⁰ 307 in één plat vlak V liggen. De voetpunten A_1, B_1, C_1... der loodlijnen liggen dan zoowel in het vlak U, als in V, dus in de doorsnede dier vlakken, d. i. in een rechte.

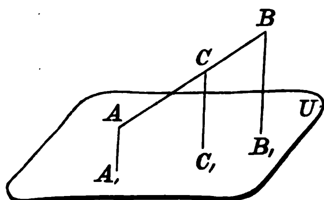


Fig. 330.

Onder den **hoek van een rechte met een plat vlak** verstaat men den hoek, dien de rechte met hare projectie op het vlak vormt. Denkt men de rechte naar beide zijden oneindig ver verlengd, dan vormt zij met hare projectie twee hoeken, die elkanders supplement zijn. De scherpe hoek wordt dan als de hoek tusschen de rechte en het vlak beschouwd.

Eigenschap 317. *De hoek tusschen een rechte en een vlak is kleiner dan de hoek tusschen die rechte en een willekeurige rechte van het vlak.*

Men heeft volgens § 164 slechts aan te toonen, dat deze eigenschap waar is voor elke rechte door het snijpunt van de rechte met het vlak in dit laatste getrokken.

Gegeven: $AA_1 \perp$ het vlak U; S en A_1 zijn de snijpunten van A B en AA_1 met U; S C ligt in U.

Te bewijzen:

$\angle ASC > \angle ASA_1$.

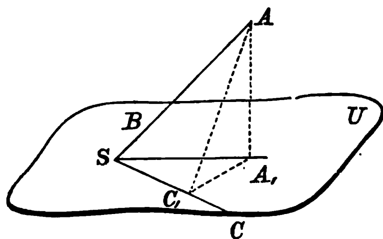


Fig. 331.

Bewijs: Neemt men op S C een stuk $SC_1 = SA_1$ en trekt AC_1 en A_1C_1, dan is $\triangle AA_1C_1$ rechthoekig in A_1, omdat $AA_1 \perp$ het vlak U is. Dus is $AC_1 > AA_1$. De driehoeken ASC_1 en ASA_1 hebben nu twee zijden gelijk, terwijl de derde zijde van den eersten grooter is dan die van den tweeden; dus is de ingesloten hoek ASC_1 van den eersten ook grooter dan de ingesloten hoek ASA_1 van den tweeden.

Eigenschap 318. *De hoek tusschen een rechte en een plat vlak is het complement van een der hoeken tusschen die rechte en een willekeurige loodlijn.*

Bewijs: Daar de hoek tusschen twee rechten geconstrueerd wordt door uit een punt van de eene rechte een lijn te trekken, die evenwijdig loopt met de andere, zoo heeft men, ten einde de eigenschap te bewijzen, slechts aan te toonen, dat de hoek tusschen S A en het vlak U in fig. 331 het complement is van een der hoeken tusschen S A en de loodlijn $A A_1$, of dat $\angle A S A_1$ het complement is van $\angle S A A_1$, en dit blijkt onmiddellijk uit den rechthoekigen driehoek $S A A_1$.

Deze eigenschap wordt met goed gevolg toegepast bij het oplossen van vele vraagstukken, die betrekking hebben op den hoek tusschen een rechte en een vlak.

Vraagstukken.

728. Staat een rechte loodrecht op een rechte van een vlak, maar scheefhoekig op een andere in het vlak gegeven rechte, dan staat zij scheefhoekig op elke andere rechte in het vlak.

729. Bewijs, dat de loodlijn, uit een punt op een vlak neergelaten, kleiner is dan elke andere rechte, die dat punt met een punt van het vlak verbindt.

730. Twee schuine rechten, die een punt buiten een vlak met twee punten in het vlak verbinden, zijn gelijk, als haar voetpunten even ver verwijderd zijn van het voetpunt der loodlijn, uit dat punt op het vlak neergelaten. Bewijs ook het omgekeerde.

731. Een schuine lijn, uit een punt buiten een vlak naar dat vlak getrokken, wordt grooter, als haar voetpunt zich verder van het voetpunt der loodlijn, uit het punt op het vlak neergelaten, verwijdert. Bewijs ook het omgekeerde.

732. Gegeven een rechte en een punt daarbuiten. Men vraagt door dat punt een rechte te construeeren, die de gegeven rechte loodrecht kruist.

733. Bij dezelfde gegevens als in het vorige vraagstuk, vraagt men twee constructies voor een rechte, die door het gegeven punt gaat en de gegeven rechte loodrecht snijdt.

734. Trekt men uit een punt der ruimte loodlijnen op twee snijdende vlakken, dan staat het vlak dier loodlijnen loodrecht op de snijlijn der vlakken.

735. Als een rechte l en een vlak U loodrecht op elkander staan, en V een willekeurig vlak is, dan staat de projectie van l op V loodrecht op de doorsnede van U en V.

736. Gegeven een vlak U en een rechte *l*. Men vraag
dat een rechte, die in het vlak U loodrecht op de proj
trokken wordt, tevens de rechte *l* loodrecht kruist of
737. Noem en bewijs het omgekeerde van de eigensc
738. De hoek, dien een lijn met een vlak vormt, is
de hoek, gevormd door een rechte loodrecht op dat
vlak loodrecht op die lijn.
739. Gegeven een rechte *l* en een vlak U. Men proj
en trekt daarna in U twee rechten *m* en *n*, die gelijk
die projectie vormen. Te bewijzen, dat *m* en *n* gelijke
vormen.
740. De loodlijnen, uit één punt getrokken op vlak
eenzelfde rechte gaan, liggen in één plat vlak.

HOOFDSTUK XXX.

EEN RECHTE EVENWIJDIG MET EEN PLAT VLAK.

169. Volgens § 160 noemt men een rechte evenwijdig met een vlak, als zij, hoever ook verlengd, geen punt gemeen hebben.

Eigenschap 319. *Een rechte loopt evenwijdig met een vlak, als zij evenwijdig loopt met een rechte van het vlak.*

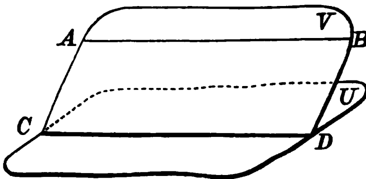


Fig. 332.

Gegeven: A B || C D.

C D ligt in het vlak U.

Te bewijzen: A B || het vlak U.

Bewijs: Men heeft slechts te bewijzen, dat A B geen enkel punt met U gemeen kan hebben. Daar A B || C D is, kan men door deze rechten een vlak V brengen, dat het vlak U volgens C D snijdt. Een punt, dat aan A B en het vlak U gemeen is, zou dan ook in de beide vlakken U en V, dus in hun snijlijn C D moeten liggen, m. a. w. als A B het vlak U sneed, zou A B ook C D moeten snijden, wat tegen het gegevene strijdt.

Opmerking: Deze stelling levert een eenvoudig middel om door een willekeurige rechte A B een vlak te brengen, dat evenwijdig loopt met een andere rechte C D. Men trekke daartoe door een punt P van A B een rechte P Q || C D. Het vlak, door A B en P Q gebracht, loopt dan volgens N° 319 || C D.

Eigenschap 320. *Als een rechte evenwijdig loopt met een vlak, dan zal ieder vlak, dat door die rechte gaat en het vlak U snijdt, een snijlijn evenwijdig met de gegeven rechte moeten opleveren.*

Gegeven in fig. 332: A B || het vlak U.

Het vlak V bevat A B en snijdt het vlak U volgens C D.

Te bewijzen: C D || A B.

Bewijs: Er zijn drie onderstellingen mogelijk: 1^0. A B kruist C D; 2^0. A B snijdt C D; 3^0. A B || C D. A B kan C D niet kruisen, omdat beide rechten in het vlak V liggen. A B kan C D ook niet snijden, omdat dan A B ook het vlak U zou snijden, hetgeen tegen het gegevene strijdt. Dus moet A B || C D zijn.

Eigenschap 321. *Als een rechte evenwijdig loopt met een vlak, is zij evenwijdig aan haar projectie op het vlak.*

Gegeven: A B || het vlak U.

A_1 en B_1 zijn de voetpunten der loodlijnen, uit A en B op het vlak U neergelaten.

Te bewijzen: A B || $A_1 B_1$.

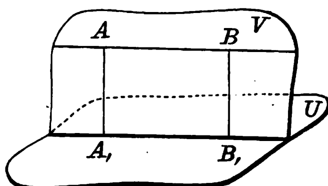


Fig. 333.

Bewijs: Omdat AA_1 en $BB_1 \perp$ het vlak U staan, is $AA_1 || BB_1$. Nu kan dus door AA_1 en BB_1 een vlak V gebracht worden, dat dan ook A B en $A_1 B_1$ bevatten moet en dat het vlak U volgens $A_1 B_1$ snijdt. Maar daar A B || het vlak U is, moet nu volgens N° 320 $A_1 B_1$ || A B zijn.

170. Onder den **afstand van een punt tot een vlak** verstaat men de lengte der loodlijn, uit dat punt op het vlak neergelaten.

Eigenschap 322. *Als een rechte evenwijdig is met een vlak, hebben al haar punten gelijken afstand tot dat vlak.*

Gegeven in fig. 333: A B || het vlak U;

A_1 en B_1 zijn de voetpunten der loodlijnen, uit A en B op het vlak U neergelaten.

Te bewijzen: $AA_1 = BB_1$.

Bewijs: $A_1 B_1$ is de projectie van A B op het vlak U, dus is volgens de vorige stelling $A_1 B_1$ || A B. Omdat AA_1 en BB_1 beide loodrecht op het vlak U staan, is volgens N° 314 $AA_1 || BB_1$. Dus is AA_1B_1B een parallelogram en $AA_1 = BB_1$.

Als een rechte evenwijdig loopt met een vlak, dan noemt men den afstand van een harer punten tot het vlak kortweg den **afstand van de rechte tot het vlak.**

Eigenschap 323. *Een rechte loopt evenwijdig met een vlak, als twee willekeurige harer pnnten gelijke afstanden tot het vlak hebben.*

Gegeven in fig. 333: $AA_1 = BB_1$.

A_1 en B_1 zijn de voetpunten der loodlijnen, uit A en B op het vlak U neergelaten.

Te bewijzen: A B || het vlak U.

Bewijs: Volgens N° 314 is

$$A A_1 \parallel B B_1,$$

en daar volgens het gegevene

$$A A_1 = B B_1$$

is, zoo is de vierhoek $A B B_1 A_1$ een parallelogram, dus is

$$A B \parallel A_1 B_1,$$

en dan is volgens N° 319 ook

$$A B \parallel \text{het vlak } U.$$

171. **Eigenschap 324.** *Als een rechte evenwijdig is met een vlak, en men trekt uit een punt van dat vlak een rechte evenwijdig met de eerste, dan moet deze in het vlak liggen.*

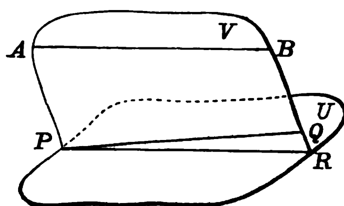


Fig. 334.

Gegeven: $A B \parallel$ het vlak U,
P ligt in het vlak U,
$P Q \parallel A B$

Te bewijzen: P Q ligt in het vlak U.

Bewijs: Daar $P Q \parallel A B$ is, kan men door P Q en A B steeds een vlak V brengen. Wanneer nu P Q niet in het vlak U lag, dan zou het vlak V met U een door P gaande, van P Q verschillende rechte P R gemeen hebben. Volgens N° 320 moest dan echter $P R \parallel A B$ zijn, zoodat door P twee rechten P Q en P R zouden gaan, die beide $\parallel A B$ waren, hetgeen tegen N° 303 strijdt. Dus ligt P Q in het vlak U.

Eigenschap 325. *Als een rechte evenwijdig is met twee vlakken, dan is zij evenwijdig met hunne doorsnede.*

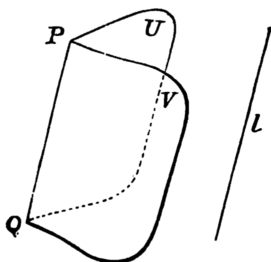


Fig. 335.

Gegeven: $l \parallel$ het vlak U,
$l \parallel$ het vlak V,
P Q is de doorsnede van de vlakken U en V.

Te bewijzen: $l \parallel P Q$.

Bewijs: Men kan door P een rechte getrokken denken, die evenwijdig met de rechte l is. Deze moet dan volgens N° 324 zoowel in het vlak U als in het vlak V liggen, omdat P in die twee vlakken ligt. Dus is de doorsnede dier vlakken, d.i. P Q, de rechte, die door $P \parallel l$ getrokken wordt.

172. **Eigenschap 326.** *De projectie van een rechten hoek op een plat vlak is een rechte hoek, als één der beenen evenwijdig aan dat vlak loopt.*

Gegeven: ∟ A B C = R;
A B || het vlak U.
A_1, B_1, C_1 zijn de voetpunten der loodlijnen uit A, B, C op het vlak U neergelaten.

Te bewijzen: ∟ $A_1 B_1 C_1$ = 1 R.

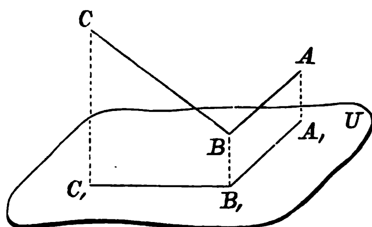


Fig. 336.

Bewijs: Ten einde het gestelde te bewijzen, zullen wij aantoonen, òf dat $A_1 B_1$ loodrecht is op een vlak, waarin $B_1 C_1$ ligt, òf dat $B_1 C_1$ loodrecht is op een vlak, waarin $A_1 B_1$ gelegen is. Het ligt dus voor de hand te onderzoeken, of $A_1 B_1 \perp$ vlak B C $C_1 B_1$ is. Daar echter A B || het vlak U is, zoo is volgens N⁰ 321 A B || $A_1 B_1$, en dus kan men volgens N⁰ 313 ook onderzoeken, of A B $\perp$ het vlak B C C_1 B is. Omdat B $B_1 \perp$ het vlak U is, zal $A_1 B_1 \perp$ B B_1 zijn, dus is ook A B $\perp$ B B_1 en volgens het gegevene is A B $\perp$ B C, dus is A B $\perp$ op twee rechten van het vlak C B $B_1 C_1$, d. i. A B $\perp$ het vlak C B $B_1 C_1$.

Vraagstukken.

741. Trekt men in een van twee snijdende vlakken een rechte, die evenwijdig loopt aan het andere, dan moet deze rechte evenwijdig zijn aan de doorsnede dier vlakken.

742. Hoeveel vlakken kunnen door een gegeven punt gebracht worden, evenwijdig aan een gegeven rechte?

743. Men vraagt door een gegeven punt een vlak te brengen, dat evenwijdig is aan twee gegeven rechten.

744. Trekt men uit twee willekeurige punten van een vlak twee evenwijdige rechten, die gelijke lengte hebben, dan is de verbindingslijn der uiteinden evenwijdig met het vlak en omgekeerd.

745. Als een rechte loodrecht is op een vlak, dan zal iedere rechte, die de eerste loodrecht kruist of snijdt, òf evenwijdig aan dat vlak zijn òf daarin liggen.

746. Te bewijzen, dat door een gegeven rechte slechts één vlak gebracht kan worden, dat evenwijdig is aan een andere rechte, die de eerste kruist.

747. Bewijs N⁰ 325 door toepassing van N⁰ 320.

HOOFDSTUK XXXI.

EVENWIJDIGE VLAKKEN.

173. In § 161 zagen wij reeds, dat twee platte vlakken evenwijdig genoemd worden, als zij, hoever ook verlengd, geen enkel punt gemeen hebben.

Allereerst zal nu wel de volgende eigenschap duidelijk zijn:

Eigenschap 327. *Elke rechte, in één van twee evenwijdige vlakken gelegen, is evenwijdig met het andere vlak.*

Bewijs: Sneed namelijk die rechte dat tweede vlak, dan zou dat snijpunt zoowel in het eene als in het andere vlak liggen, m. a. w. de vlakken zouden niet evenwijdig kunnen zijn.

Gemakkelijk zijn verder de volgende gevallen te bewijzen:

Eigenschap 328. *Twee platte vlakken zijn evenwijdig, als zij loodrecht staan op dezelfde rechte.*

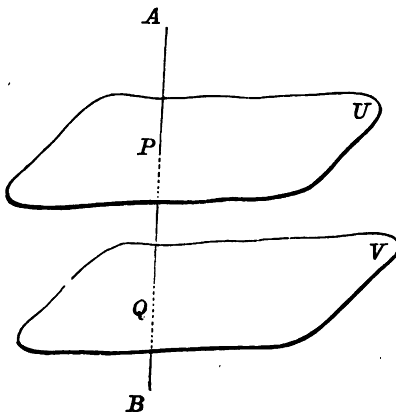


Fig. 337.

Gegeven: het vlak $U \perp AB$ in P;
het vlak $V \perp AB$ in Q.

Te bewijzen: het vlak $U \parallel$ het vlak V.

Bewijs: Onderstelt men, dat de vlakken U en V niet evenwijdig waren en dus een punt C gemeen hadden, dan zou er door vereeniging van C met P en Q een driehoek ontstaan. Volgens het gegevene zou dan echter

$\llcorner QPC = 1\,R$ en $\llcorner PQC = 1\,R$

zijn, dus zou $\Delta\, PQC$ twee rechte hoeken hebben. De vlakken kunnen dus geen punt gemeen hebben.

Eigenschap 329. *Twee vlakken zijn evenwijdig, als twee snijdende rechten van het eene vlak evenwijdig zijn met twee snijdende rechten van het andere.*

Gegeven:

$A B \parallel A_1 B_1$, $C D \parallel C_1 D_1$;
A B en C D liggen in het vlak U,
$A_1 B_1$ en $C_1 D_1$ in het vlak V.

Te bewijzen:

Het vlak U $\parallel$ het vlak V.

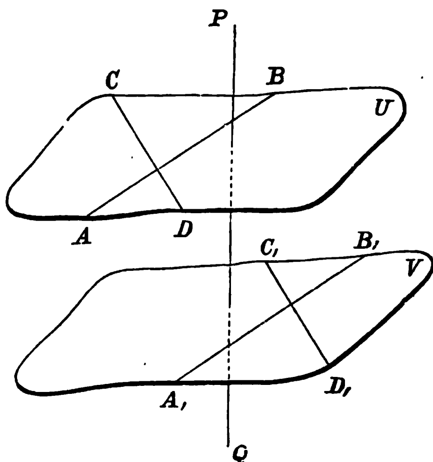


Fig. 338.

Bewijs: Wij zullen trachten aan te toonen, dat beide vlakken op eenzelfde rechte loodrecht staan. Trekt men daartoe P Q $\perp$ het vlak U, dan kruist deze lijn de rechten A B en C D rechthoekig. Maar de hoek tusschen P Q en A B is gelijk aan dien tusschen P Q en $A_1 B_1$ volgens § 164 en omdat $A_1 B_1 \parallel A B$ is. Evenzoo is de hoek tusschen P Q en C D gelijk aan dien tusschen P Q en $C_1 D_1$, derhalve kruist P Q de rechten $A_1 B_1$ en $C_1 D_1$ loodrecht, zoodat P Q nu ook $\perp$ het vlak V is.

Daar de beide vlakken U en V loodrecht op P Q staan, zoo is nu volgens N⁰ 328 U $\parallel$ V.

174. **Eigenschap 330.** *Als twee vlakken evenwijdig zijn en beide door een derde vlak gesneden worden, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.*

Gegeven:

Het vlak U $\parallel$ het vlak V.

Te bewijzen:

A B $\parallel$ C D.

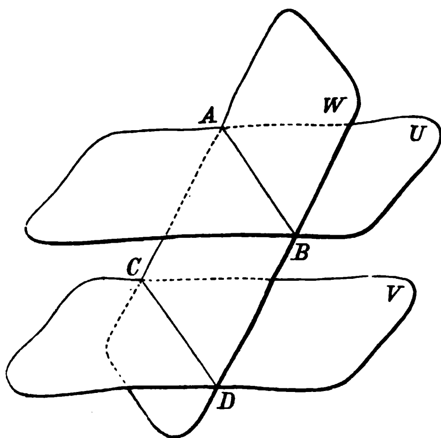


Fig. 339.

Bewijs: A B kan C D niet kruisen, omdat beide in het vlak W liggen en A B kan C D niet snijden, omdat dan ook de vlakken U en V een punt gemeen zouden hebben. Dus is

A B $\parallel$ C D.

Eigenschap 331. *Als een rechte een van twee evenwijdige vlakken snijdt, snijdt zij ook het andere.*

Gegeven: Het vlak U || het vlak V.
De rechte l snijdt U in P.

Te bewijzen: l snijdt ook V.

Bewijs: Wij zullen trachten aan te toonen, dat de rechte l een rechte in het vlak V snijdt. Breng daartoe een vlak W door l en een willekeurig punt Q van V. Daar de vlakken U en W het punt P gemeen hebben, zullen zij elkander volgens N⁰ 301 volgens een rechte p snijden. En aangezien de vlakken V en W het punt Q gemeen hebben, moeten zij dus ook een rechte q gemeen hebben. Dan is echter volgens N⁰ 330 $p \parallel q$ en daar l de rechte p snijdt, moet zij volgens N⁰ 12 dus ook q en daarmede ook het vlak V snijden.

175. **Eigenschap 332.** *Een rechte, die loodrecht staat op één van twee evenwijdige vlakken, staat ook loodrecht op het andere.*

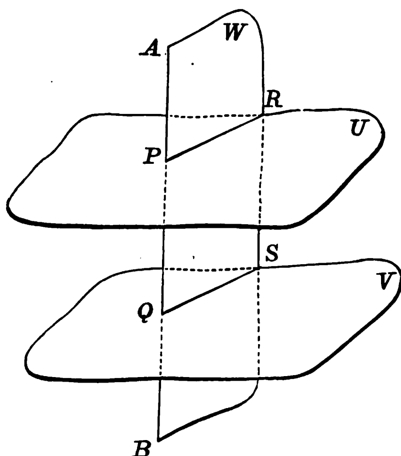


Fig. 340.

Gegeven:

het vlak U || het vlak V,
A B ⊥ het vlak U.

Te bewijzen:

A B ⊥ het vlak V.

Bewijs: Brengt men door A B een willekeurig vlak W aan, dan zal dit volgens N⁰ 331 en 330 de vlakken U en V volgens twee evenwijdige rechten P R en Q S snijden, dus is

$$\llcorner APR = \llcorner AQS,$$

maar, omdat A B ⊥ het vlak U is, moet

$$\llcorner APR = 1R$$

zijn, dus is ook

$$\llcorner AQS = 1R.$$

Door nu een ander vlak door A B te brengen, bewijst men onmiddellijk, dat A B loodrecht staat op twee rechten van het vlak V, zoodat A B ⊥ het vlak V is.

176. **Eigenschap 333.** *Alle punten van een van twee evenwijdige vlakken hebben gelijke afstanden tot het andere.*

Gegeven:

Het vlak U || het vlak V.

Uit A en C in U zijn loodlijnen op V getrokken, die dit vlak in B en D ontmoeten.

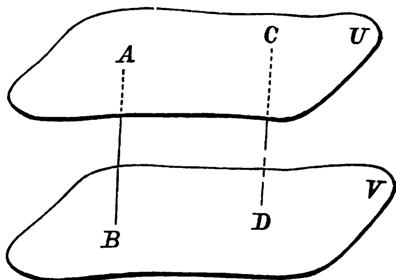


Fig. 341.

Te bewijzen:

A B = C D.

Bewijs: Omdat A B en C D beide ⊥ het vlak U zijn, loopen zij volgens N⁰ 314 evenwijdig. Dus kan men door deze rechten een vlak brengen, dat de vlakken U en V volgens A C en B D snijden zal. Maar dan is volgens N⁰ 330 A C || B D en dus is vierhoek A B D C een parallelogram, zoodat A B = C D is.

Eigenschap 334. *Twee vlakken zijn evenwijdig, als drie willekeurige, niet op één rechte gelegen, punten van het eene vlak gelijke afstanden hebben tot het andere vlak.*

Gegeven:

A, B, C, liggen in het vlak U;

$A A_1$, $B B_1$, $C C_1$ zijn ⊥ het vlak V en ontmoeten het vlak V in A_1, B_1, C_1.

$A A_1 = B B_1 = C C_1$.

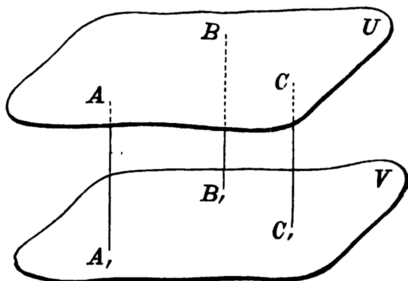


Fig. 342.

Te bewijzen:

Het vlak U || het vlak V.

Bewijs: Omdat $A A_1$ en $B B_1$ loodrecht zijn op het vlak V, en bovendien $A A_1 || B B_1$ is volgens het gegevene, moet de rechte A B volgens N⁰ 323 evenwijdig met het vlak V zijn. Maar dan is ook $A B || A_1 B_1$ volgens N⁰ 321. Evenzoo toont men aan, dat $A C || A_1 C_1$ is, zoodat nu twee snijdende rechten in het vlak U evenwijdig zijn met twee snijdende rechten in V, waaruit men volgens N⁰ 329 besluit, dat het vlak U || het vlak V is.

177. **Eigenschap 335.** *Alle rechten, die door een punt der ruimte evenwijdig met een gegeven vlak getrokken worden, liggen in een plat vlak, dat evenwijdig is met het eerste.*

Gegeven: P Q, P R, P S zijn || het vlak U.

Te bewijzen: P Q, P R, P S liggen in één vlak, dat || het vlak U is.

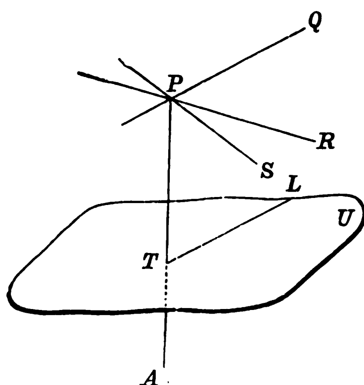


Fig. 343.

Bewijs: Laat men uit P de loodlijn P A op het vlak U neer en brengt men een vlak door P Q en P A, dan snijdt dit het vlak U volgens een rechte T L, die volgens N° 320 || loopt met P Q, daar P Q || het vlak U is. Maar PA ⊥ T L, dus is

P A ⊥ P Q.

Evenzoo toont men aan, dat

P A ⊥ P R en P A ⊥ P S,

dus liggen de rechten P Q, P R en P S volgens N° 310 in één vlak V, dat in P ⊥ P A staat. Aangezien het vlak U ook ⊥ P A staat, is dus volgens N° 328 het vlak V || het vlak U.

Vraagstukken.

748. Bewijs N° 329 ook indirect met toepassing van N° 320.

749. Door een punt buiten een vlak kan één, maar ook niet meer dan één, vlak gebracht worden, dat evenwijdig loopt aan het eerste.

N. B. Voor het bewijs trekke men uit het punt een loodlijn op het gegeven vlak.

750. Als een vlak een van twee evenwijdige vlakken snijdt, snijdt het ook het andere.

751. Twee vlakken, die elk evenwijdig zijn aan een derde, zijn evenwijdig.

752. Trekt men door een punt van een van twee evenwijdige vlakken een rechte, evenwijdig aan het andere vlak, dan ligt die rechte in het eerste vlak.

753. Loopt een rechte evenwijdig met een van twee evenwijdige vlakken, dan loopt zij ook evenwijdig aan het andere.

754. Twee evenwijdige vlakken snijden van twee willekeurige evenwijdige rechten gelijke stukken af.

755. De stukken, die eenige evenwijdige vlakken van een rechte afsnijden, zijn evenredig met de gelijkstandige stukken, die zij van een andere rechte afsnijden.

756. De meetkundige plaats der middens van alle rechten, die een punt van een van twee evenwijdige vlakken met een punt van het

andere vlak verbinden, is een vlak, dat in het midden van den afstand dier vlakken evenwijdig aan beide gebracht wordt.

757. De middens van de verbindingslijnen van elke twee willekeurige punten, die op twee kruisende rechten gelegen zijn, liggen in een plat vlak, dat evenwijdig loopt aan die kruisende rechten.

758. De projecties van twee evenwijdige lijnen op een zelfde vlak zijn evenwijdig.

759. De hoeken, die twee evenwijdigen met een vlak vormen, zijn gelijk.

760. Wanneer is de projectie van een rechthoek op een plat vlak een rechthoek?

761. Wanneer is de projectie van een ruit op een plat vlak een ruit?

N. B. Trek de diagonalen.

762. De projecties van eenzelfde rechte op twee evenwijdige vlakken zijn evenwijdig.

763. De hoeken, die één rechte met twee evenwijdige vlakken vormt, zijn gelijk.

764. Hoe construeert men een rechte, die door een gegeven punt gaat, een gegeven rechte kruist en evenwijdig is aan een gegeven vlak?

765. Zijn twee snijdende vlakken evenwijdig aan twee andere snijdende vlakken, dan is de doorsnede van het eerste paar evenwijdig aan die van het tweede paar.

HOOFDSTUK XXXII.

TWEE WILLEKEURIGE VLAKKEN. TWEEVLAKSHOEK.

178. Zijn twee vlakken niet evenwijdig, dan hebben zij een rechte gemeen. Worden zij nu door deze rechte heen niet verlengd, overigens echter tot in het oneindige uitgebreid gedacht, dan noemt men de aldus gevormde figuur een *tweevlakshoek*.

De beide vlakken heeten de *zijden van den tweevlakshoek* en de rechte, waarin deze elkander ontmoeten, heet de *ribbe van den tweevlakshoek*.

Een tweevlakshoek wordt genoemd met vier letters, waarvan de beide middelste bij de ribbe geplaatst zijn, terwijl elk der andere bij een der vlakken zich bevindt. In fig. 344 spreekt men dus van den tweevlakshoek C A B D of D A B C.

Ten einde tweevlakshoeken op een eenvoudige wijze met elkander te vergelijken, heeft men een gewonen hoek geconstrueerd, die met den tweevlakshoek in nauw verband staat. Deze wordt een *standhoek van den tweevlakshoek* genoemd en verkregen door in één punt der ribbe in elk der vlakken een loodlijn op die ribbe te trekken. Is dus in fig. 344 $PQ \perp AB$ en $PR \perp AB$, terwijl P Q in het vlak B A C, P R in het vlak B A D ligt, dan is ∟ Q P R een standhoek. Men ziet in verband met N⁰ 306 onmiddellijk in, dat de grootte van een standhoek onafhankelijk is van de plaats van het punt P.

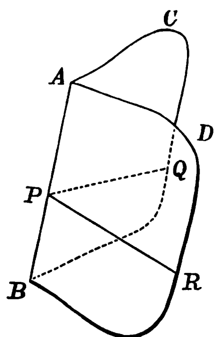


Fig. 344.

Verder wordt het vlak Q P R, waarin een standhoek gelegen is, een *standvlak van den tweevlakshoek* genoemd.

Omdat $AB \perp PQ$ en $AB \perp PR$ is, zal $AB \perp$ het vlak Q P R zijn, dus de ribbe is loodrecht op een standvlak en hieruit volgt dan weder dat alle standvlakken van een tweevlakshoek volgens N⁰ 328 evenwijdig zijn.

179. Men noemt twee tweevlakshoeken gelijk, als zij zoodanig geplaatst kunnen worden, dat de beide zijden van den eenen met die van den anderen volkomen samenvallen.

Om nu twee tweevlakshoeken en hunne standhoeken te vergelijken bewijzen wij de eigenschappen:

Eigenschap 336. *Als twee tweevlakshoeken gelijk zijn, hebben zij gelijke standhoeken en omgekeerd, als de standhoeken van twee tweevlakshoeken gelijk zijn, dan zijn die tweevlakshoeken gelijk.*

Gegeven:

Tweevlakshoek ABCD = Tweevlakshoek $A_1 B_1 C_1 D_1$

PQ ⊥ BC in het vlak CBA,

PR ⊥ BC in het vlak CBD;

$P_1 Q_1 \perp B_1 C_1$ in het vlak $C_1 B_1 A_1$,

$P_1 R_1 \perp B_1 C_1$ in het vlak $C_1 B_1 D_1$.

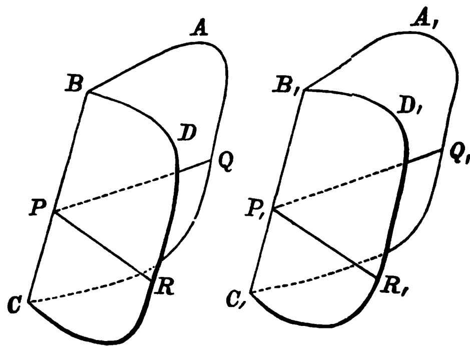


Fig. 245.

Te bewijzen: $\angle QPR = \angle Q_1 P_1 R_1$.

Bewijs: Men kan steeds den tweevlakshoek ABCD zoodanig plaatsen, dat het punt P in P_1, BC langs $B_1 C_1$ en eindelijk het vlak ABC langs het vlak $A_1 B_1 C_1$ valt, terwijl de vlakken DBC en $D_1 B_1 C_1$ aan dezelfde zijde van het vlak $A_1 B_1 C_1$ liggen. Wegens de gelijkheid der tweevlakshoeken moet dan ook het vlak DBC de zijde $D_1 B_1 C_1$ volkomen bedekken. Maar nu moet PQ met $P_1 Q_1$ samenvallen, daar beide in hetzelfde vlak in het punt $P_1 \perp B_1 C_1$ staan en evenzoo moeten PR en $P_1 R_1$ samenvallen. Dus is

$$\angle QPR = \angle Q_1 P_1 R_1.$$

Bewijs van de omgekeerde eigenschap:

Gegeven in fig. 345:

PQ ⊥ BC in het vlak CBA, PR ⊥ BC in het vlak CBD,

$P_1 Q_1 \perp B_1 C_1$ in het vlak $C_1 B_1 A_1$, $P_1 R_1 \perp B_1 C_1$ in het vlak $C_1 B_1 D_1$,

$$\angle QPR = \angle Q_1 P_1 R_1.$$

Te bewijzen:

Tweevlakshoek ABCD = Tweevlakshoek $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Bewijs: Men kan steeds $\llcorner$ Q P R zoodanig plaatsen, dat deze $\llcorner$ $Q_1 P_1 R_1$ volkomen bedekt, zoodat de rechte $P_1 Q_1$ langs P Q en $P_1 R_1$ langs P R komt. Daar B C $\perp$ het vlak Q P R en $B_1 C_1 \perp$ het vlak $Q_1 P_1 R_1$ is, zal dan volgens N° 312 B C ook met $B_1 C_1$ moeten samenvallen.

Nu hebben de vlakken A B C en $A_1 B_1 C_1$ twee paren rechten, namelijk B C en $B_1 C_1$, P Q en $P_1 Q_1$ gemeen, zoodat zij samenvallen moeten.

Evenzoo bewijst men, dat de vlakken D B C en $D_1 B_1 C_1$ samenvallen, dus is

$$\text{tweevlakshoek } ABCD = \text{tweevlakshoek } A_1 B_1 C_1 D_1.$$

Eigenschap 337. *Als twee tweevlakshoeken ongelijk zijn, dan behoort bij den grootsten tweevlakshoek ook de grootste standhoek, en omgekeerd.*

Wij zullen hier alleen het eerste gedeelte bewijzen.

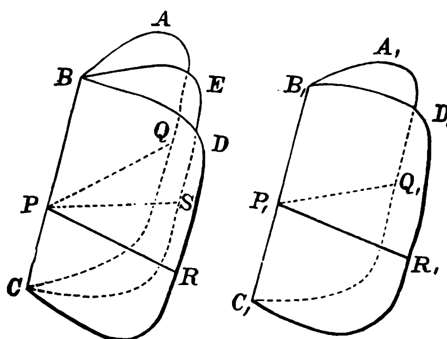


Fig. 346.

Gegeven:

Tweevlakshoek A B C D > tweevlakshoek $A_1 B_1 C_1 D_1$.

$PQ \perp BC$, $PR \perp BC$;

$P_1 Q_1 \perp B_1 C_1$, $P_1 R_1 \perp B_1 C_1$.

Te bewijzen:

$\llcorner QPR > \llcorner Q_1 P_1 R_1$.

Bewijs: Omdat tweevlakshoek A B C D > tweevlakshoek $A_1 B_1 C_1 D_1$ is, kan men steeds een vlak E B C aangebracht denken, zoodanig, dat

$$\text{tweevlakshoek } ABCE = \text{tweevlakshoek } A_1 B_1 C_1 D_1$$

is, terwijl dan dit vlak E B C tusschen de vlakken A B C en D B C liggen moet. Wanneer nu P S de doorsnede is van het vlak E B C met het standvlak Q P R, dan is B C $\perp$ P S, omdat B C $\perp$ het vlak Q P R is; dus is $\llcorner$ Q P S de standhoek van den tweevlakshoek A B C E. Volgens de vorige stelling is nu

$$\llcorner QPS = \llcorner Q_1 P_1 R_1.$$

Maar P S moet tusschen P Q en P R liggen, dus is

$$\llcorner QPS < \llcorner QPR,$$

of ook

$$\llcorner Q_1 P_1 R_1 < \llcorner QPR.$$

Eigenschap 338. ***Als twee tweevlakshoeken ongelijk zijn, verhouden zij zich als hunne standhoeken.***

Het bewijs van deze eigenschap wordt geleverd door de verhouding der tweevlakshoeken te bepalen, waarbij dus twee gevallen onderscheiden moeten worden, namelijk, dat de tweevlakshoeken een grootste gemeene maat hebben of niet.

In het eerste geval wordt de grootste gemeene maat op de beide tweevlakshoeken afgemeten en aldus gemakkelijk hunne verhouding bepaald, terwijl de daardoor verkregen deelvlakken de standvlakken volgens rechten snijden, die de standhoeken in onderling gelijke deelen verdeelen, zoodanig, dat het aantal deelen in een standhoek gelijk is aan dat in den bijbehoorenden tweevlakshoek.

Men ziet hieruit, dat de methode van bewijs, die bij de eigenschappen in de planimetrie toegepast is, hier volledig aangewend kan worden en hetzelfde geldt voor het geval, dat de tweevlakshoeken onderling onmeetbaar zijn. Wij blijven daarom niet langer bij dit bewijs stilstaan.

180. De bij een tweevlakshoek behoorende standhoek levert nu een eenvoudig middel op om de grootte van den tweevlakshoek te beoordeelen. Wij noemen dus een tweevlakshoek scherp, recht, stomp, gestrekt, naarmate een standhoek scherp, recht, stomp, gestrekt is.

Het belangrijkste geval is dat, waarin de standhoek recht is. Men zegt dan, dat de beide zijden van den tweevlakshoek loodrecht op elkander staan en in het algemeen zegt men: Twee vlakken staan loodrecht op elkander, als een der vier tweevlakshoeken, die zij vormen, recht is.

Eigenschap 339. ***Een vlak staat loodrecht op een ander, als een van beide een rechte bevat, die loodrecht staat op het andere.***

Gegeven: A B ⊥ het vlak U,
A B ligt in het vlak V.

Te bewijzen: Het vlak V ⊥ het vlak U.

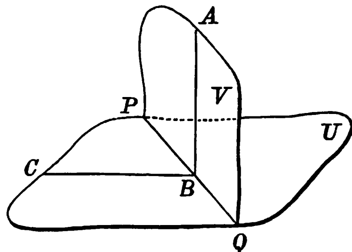


Fig. 347.

Bewijs: Men heeft slechts aan te toonen, dat een standhoek van de vlakken U en V recht is. Om dezen te construeeren merken wij op, dat A B in het vlak V loodrecht op de doorsnede P Q van de vlakken U en V staat en dus een been van den standhoek is, terwijl het andere been door B in het vlak U ⊥ P Q getrokken moet worden. Is dit B C, dan is ∟ A B C = 1 R, omdat A B ⊥ het vlak U is, dus is het vlak V ⊥ het vlak U.

Indien men in fig. 347 let op den stand van het vlak U ten aanzien van V, dan kan men de vorige eigenschap ook aldus uitspreken:

Een vlak (namelijk U) *staat loodrecht op een ander* (V), *als het loodrecht staat op een rechte* (A B) *van dat andere vlak.*

Eigenschap 340. *Als twee vlakken loodrecht op elkander staan, en men uit een willekeurig punt van het eene vlak in dit vlak een loodlijn op hunne snijlijn trekt, dan staat deze rechte loodrecht op het andere vlak.*

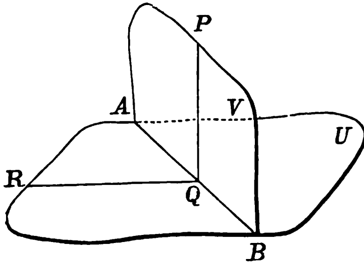


Fig. 348.

Het punt kan daarbij in de doorsnede der vlakken of daarbuiten in het vlak V liggen; de methode van bewijs blijft dezelfde.

Gegeven: Het vlak V ⊥ het vlak U.

P ligt in V; P Q is in het vlak V ⊥ A B getrokken.

Te bewijzen: P Q ⊥ het vlak U.

Bewijs: Volgens het gegevene is P Q een been van een standhoek der vlakken U en V. Construeert men nu het tweede been Q R van dien hoek, dan is, omdat het vlak V ⊥ het vlak U is, P Q ⊥ Q R en daar P Q ⊥ A B is, zal dus ook P Q ⊥ het vlak U zijn.

Eigenschap 341. *Als twee vlakken loodrecht op elkander staan en men trekt uit een punt in het eene vlak een loodlijn op het andere, dan ligt deze loodlijn in het tweede vlak.*

Ook hier geldt omtrent de ligging van het punt dezelfde opmerking als bij de vorige eigenschap.

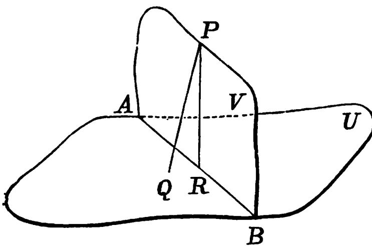


Fig. 349.

Gegeven: Het vlak V ⊥ het vlak U.

P ligt in V; P Q ⊥ het vlak U.

Te bewijzen: P Q ligt in het vlak V.

Bewijs: Onderstelt men, dat P Q niet in het vlak V lag, dan zou men toch steeds door P in het vlak V een loodlijn P R op A B kunnen trekken en deze zou dan volgens de vorige eigenschap ⊥ het vlak U staan. Dan zouden echter uit P twee loodlijnen op het vlak U getrokken kunnen worden, wat tegen N° 315 of 312 strijdt. Dus ligt P Q in het vlak V.

Eigenschap 342. *Als twee vlakken loodrecht staan op hetzelfde vlak, is hunne doorsnede ook loodrecht daarop.*

Gegeven:

Het vlak V ⊥ het vlak U,
het vlak W ⊥ het vlak U.

Te bewijzen:

P Q ⊥ het vlak U.

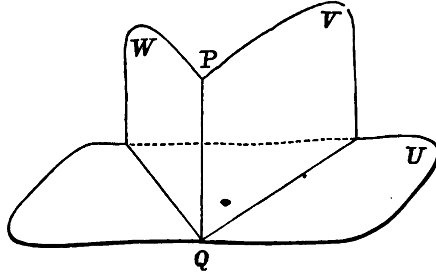


Fig. 350.

Bewijs: Indien men uit een punt van P Q, b.v. uit P, een loodlijn op het vlak U zou trekken, zou deze volgens N° 341 zoowel in het vlak V als in W moeten vallen, dus is P Q die loodlijn op U.

181. Met behulp van het begrip van een standhoek van twee vlakken kan men nog een aantal stellingen bewijzen, die veel overeenstemming vertoonen met eigenschappen in de planimetrie. Wij vermelden slechts de navolgende, die zonder nadere bepaling wel duidelijk zullen zijn.

Eigenschap 343. *Twee overstaande tweevlakshoeken zijn gelijk.*

Gegeven: de vlakken U U′ en V V′, die elkander volgens A B snijden.

Te bewijzen:

Tweevlakshoek V′ A B U′ = tweevlakshoek V A B U.

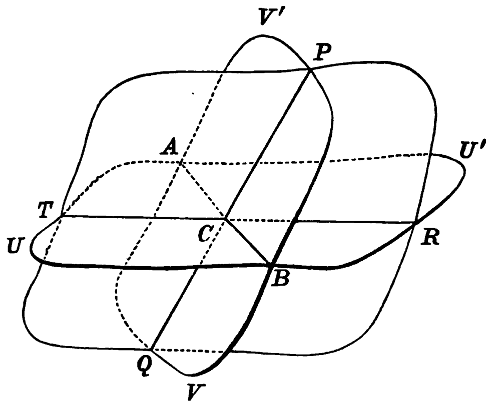


Fig. 351.

Bewijs: Brengt men in een willekeurig punt C van A B een vlak S aan, dat loodrecht op A B staat, dan snijdt dit de vlakken U U′ en V V volgens twee rechten T R en P Q, die beide loodrecht op A B staan. Nu zijn ∟ P C R en ∟ T C Q standhoeken der tweevlakshoeken V′ A B U′ en U A B V en omdat die standhoeken gelijk zijn, moeten de tweevlakshoeken volgens N° 336 ook gelijk zijn.

Eigenschap 344. *Als twee evenwijdige vlakken door een derde gesneden worden, zijn twee overeenkomstige hoeken gelijk.*

Gegeven: Het vlak U || het vlak V; het vlak W snijdt U en V volgens A B en C D.

Te bewijzen: tweevlakshoek W A B U = tweevlakshoek W C D V.

Bewijs: Omdat het vlak U || het vlak V is, zal volgens N⁰ 330 A B || C D loopen. Als men dus een vlak S aanbrengt, loodrecht op een dezer

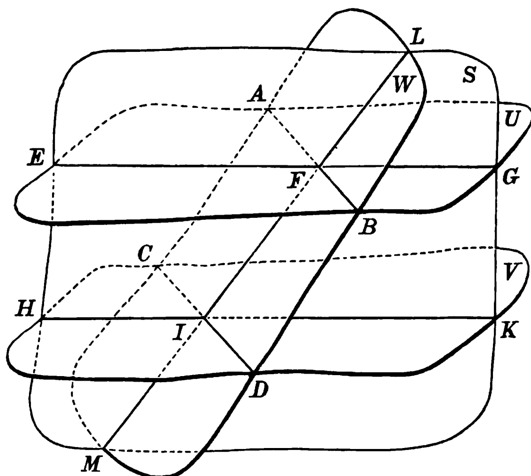


Fig. 352.

rechten, zal het volgens N⁰ 313 ook loodrecht op de andere staan. Dit vlak S snijdt dus den tweevlakshoek W A B U volgens den standhoek L F G en den tweevlakshoek W C D V volgens den standhoek F I K. Maar F G is || I K, omdat deze rechten de doorsneden zijn van één vlak S met twee evenwijdige vlakken U en V. Dus is

$$\llcorner LFG = \llcorner FIK,$$

d. w. z. de standhoek van den tweevlakshoek, tusschen de vlakken W en U gevormd, is gelijk aan dien, tusschen de vlakken W en V gevormd, dus zijn die tweevlakshoeken ook gelijk volgens N⁰ 336.

182. **Eigenschap 345.** *Een standhoek van twee vlakken is het supplement van den hoek, gevormd door twee loodlijnen, uit één punt tusschen de zijden op deze neergelaten.*

Opmerking verdient hierbij, dat, als men de loodlijnen door het punt, waaruit zij zijn neergelaten, verlengt, vier hoeken ontstaan, die gelijk

aan den standhoek van den tweevlakshoek of het supplement van dezen zijn.

Gegeven: P ligt binnen den tweevlakshoek A B C D.

P Q ⊥ het vlak D B C.

P R ⊥ het vlak A B C.

Te bewijzen:

∟ R P Q + de standhoek van den tweevlakshoek A B C D = 180°.

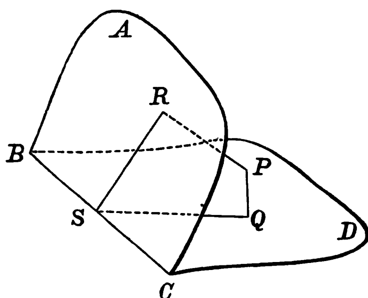


Fig. 353.

Bewijs: Om een standhoek van den tweevlakshoek A B C D te construeeren, brenge men een vlak door de loodlijnen P Q en P R. Snijdt dit vlak de rechte B C in S en vereenigt men S met de voetpunten R en Q der loodlijnen uit P, dan is ∟ R S Q een standhoek van den tweevlakshoek A B C D. Want, omdat P R ⊥ het vlak A B C is, zal R P ⊥ B C zijn; en omdat P Q ⊥ het vlak D B C is, moet P Q ⊥ B C zijn, derhalve is B C ⊥ het vlak R P Q en dus is B C ⊥ de rechten S R en S Q, die in dit vlak liggen. Maar, daar P Q ⊥ het vlak D B C is, zal P Q ⊥ S Q zijn, en evenzoo is P R ⊥ S R, dus is volgens de planimetrie

∟ R P Q + ∟ R S Q = 180°.

183. Een standhoek van een tweevlakshoek kan ook op de navolgende manier geconstrueerd worden, die dikwijls toepassing vindt.

Zijn U en V de zijden, dan neme men een punt P aan in een dezer, b.v. in V, en late nu uit P twee loodlijnen neer, ééne in het vlak V ⊥ A B en ééne ⊥ het vlak U. Verbindt men nu de voetpunten Q en R dier loodlijnen, dan is ∟ P Q R een standhoek. Want P Q ⊥ A B en P R ⊥ het vlak U, dus is P R ook ⊥ A B, zoodat A B ⊥ het vlak P Q R is of A B ⊥ Q R. P Q en Q R zijn dus de beenen van een standhoek.

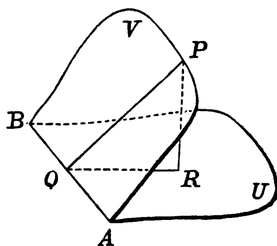


Fig. 354.

184. Wanneer twee willekeurige kruisende rechten A B en C D gegeven zijn, dan kan men door een willekeurig punt van A B een rechte C′ D′ evenwijdig met C D trekken en door A B en C′ D′ een vlak V V′ brengen, dat dan evenwijdig met C D loopt volgens N° 319. Evenzoo kan men door C D een vlak W W′ brengen, dat || A B loopt en volgens deze constructie is dan het vlak V V′ || het vlak W W′,

omdat twee snijdende rechten in het eene vlak evenwijdig zijn met twee snijdende rechten in het andere.

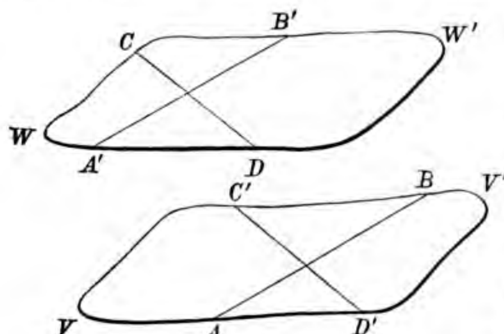


Fig. 355.

Stel nu in fig. 356 zijn de rechten A B en C D met die vlakken V V' en W W' geteekend. Men kan nu steeds door elk der rechten A B en C D een vlak brengen, dat ⊥ op een der vlakken V V' of W W' staat. Daartoe heeft men slechts uit een punt van A B en uit een punt van C D een loodlijn op de vlakken V V' en W W' te trekken en daarna door de eerste loodlijn en A B en evenzoo door de tweede loodlijn en C D een vlak te brengen. De beide zoo verkregen loodrechte vlakken zullen nu een rechte P Q gemeen hebben, die volgens N⁰ 342 ⊥ op het vlak V V' is, en dus zoowel op A B als op C D loodrecht staat. Bovendien moet P Q zoowel A B als C D snijden, omdat P Q met elk dezer rechten in een vlak ligt.

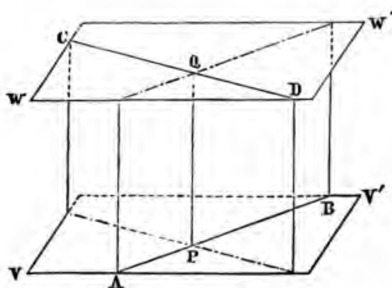


Fig. 356.

De rechte P Q, die elk van twee kruisende rechten loodrecht snijdt, wordt de afstand der kruisende rechten genoemd.

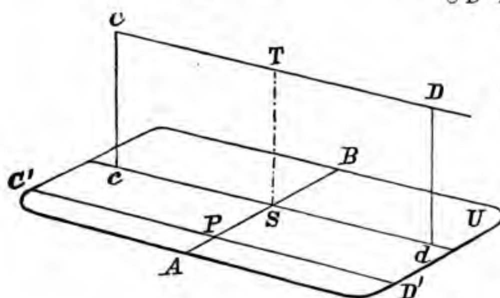


Fig. 357.

Men ziet gemakkelijk in, dat de afstand van twee kruisende rechten ook langs andere wegen bepaald kan worden. Wij vermelden daarvan de volgende:

Indien A B en C D (fig. 357) de kruisende rechten zijn, dan kan men, zooals in het begin van deze § opgemerkt is, door A B een vlak U

brengen, dat || CD is met behulp van een rechte C′D′ uit een willekeurig punt P van AB evenwijdig met CD getrokken. Projecteert men nu CD op dit vlak U volgens *cd* en snijdt deze projectie AB in S, dan zal de loodlijn ST, in S op het vlak U opgericht, den afstand van de kruisende rechten AB en CD voorstellen.

Vraagstukken.

766. Bewijs, dat de standhoek van twee vlakken kleiner is dan de hoek, dien het in een der vlakken gelegen been vormt met een willekeurige rechte in het andere vlak.

767. De standhoek van twee vlakken is grooter dan de hoek, dien een willekeurige rechte in het eene vlak vormt met hare projectie op het andere vlak.

768. Als men een willekeurig punt projecteert op elk van twee snijdende vlakken, dan zullen de loodlijnen, uit de projecties op de doorsnede der vlakken neergelaten, deze doorsnede in hetzelfde punt treffen.

769. Als door een rechte *l*, die scheefhoekig op een gegeven vlak U staat, een vlak V gaat, dat loodrecht is op U, dan zal de doorsnede van de vlakken U en V tevens de projectie van de rechte *l* op het vlak U zijn.

770. Bewijs, dat een rechte, die loodrecht staat op het vlak, dat den hoek tusschen twee gegeven vlakken halveert, gelijke hoeken met die vlakken maakt.

771. Een rechte, die loodrecht staat op een van twee onderling loodrechte vlakken, is evenwijdig aan het andere.

772. Door een gegeven rechte in een gegeven vlak kan steeds één, maar ook niet meer dan één, vlak loodrecht op het eerste aangebracht worden.

773. De afstand van twee kruisende rechten is de kortste van alle lijnen, die een punt van de eene rechte met een punt van de andere verbindt.

774. Als bij de snijding van twee vlakken door een derde de snijlijnen evenwijdig loopen en een paar overeenkomstige tweevlakshoeken gelijk zijn, dan moeten die vlakken evenwijdig zijn.

775. Deelt men twee overeenkomstige tweevlakshoeken, die bij de snijding van twee evenwijdige vlakken door een derde ontstaan, middendoor, dan loopen de deelvlakken evenwijdig.

Herhaling.

776. Als de projectie van een vlakken vierhoek op een plat vlak een parallelogram is, dan is die vierhoek een parallelogram.

777. Wanneer zullen twee snijdende vlakken van twee evenwijdige rechten gelijke stukken afsnijden?

778. Als twee rechten, elk in één van twee snijdende vlakken gelegen, evenwijdig zijn, dan loopen zij evenwijdig aan de doorsnede dier vlakken.

779. Als een rechte zich verplaatst, terwijl zij steeds twee kruisende rechten snijdt en evenwijdig aan een gegeven vlak blijft, dan beschrijft het midden van het deel der rechte, dat tusschen de kruisende lijnen gelegen is, een rechte lijn.

780. Een rechte van gegeven lengte wordt door een harer punten in dezelfde verhouding verdeeld, als hare projectie door de projectie van het aangenomen punt.

781. De projectie van het zwaartepunt van een driehoek is het zwaartepunt van de projectie van den driehoek.

782. Construeer een vlak door een gegeven lijn, dat loodrecht staat op een gegeven vlak.

783. Van alle vlakken, die door een lijn gebracht worden, welke scheefhoekig op een gegeven vlak staat, vormt het vlak, dat loodrecht op het projecteerende vlak dier rechte staat, den kleinsten hoek met het gegeven vlak.

784. De projecties van twee gelijke rechten op een vlak zijn gelijk, als die rechten gelijke hoeken met het vlak vormen.

785. De projectie van een rechte van onveranderlijke lengte op een vlak wordt kleiner, als de hoek, dien zij met het vlak vormt, grooter wordt.

786. Wat weet men omtrent de plaats van een punt in de ruimte, als de projectie van het punt op een vlak gegeven is?

787. Wat weet men omtrent de plaats van een rechte in de ruimte, als hare projectie op een plat vlak gegeven is?

788. Trekt men door een punt buiten een vlak schuine lijnen naar dat vlak, die gelijke hoeken met dat vlak vormen, dan liggen de snijpunten op een cirkel.

789. Als een rechte met de zijden van een tweevlakshoek gelijke hoeken vormt, dan liggen de snijpunten van die rechte met de zijden op gelijken afstand van die zijden.

790. Als een rechte met de zijden van een tweevlakshoek gelijke hoeken vormt, dan liggen de snijpunten van die rechte met de zijden op gelijken afstand van de ribbe.

791. Als drie rechten, die niet in één plat vlak gelegen zijn, elkander twee aan twee snijden, moeten zij door één punt gaan.

792. Gegeven een willekeurige tweevlakshoek. Men vraagt dezen zoodanig door een vlak te snijden, dat de twee snijlijnen een rechten hoek vormen.

HOOFDSTUK XXXIII.

SNIJDING VAN DRIE VLAKKEN. DRIEVLAKSHOEKEN.

185. Ten opzichte van den onderlingen stand van drie vlakken kunnen de volgende gevallen onderscheiden worden:

1°. *De drie vlakken zijn twee aan twee evenwijdig.* Zij hebben dan geen enkel punt gemeen.

2°. *De drie vlakken snijden elkander volgens een enkele rechte.* Zij vormen dan een vlakkenbundel. Deze kan ook uit meer dan drie vlakken, die door één rechte gaan, samengesteld zijn.

3°. *Twee der vlakken* U *en* V *snijden elkander volgens een rechte* P Q en het derde vlak kan dan op drie verschillende wijzen aangebracht worden:

a. Het derde vlak W *loopt evenwijdig aan een der beide snijdende vlakken, b. v. aan* U. Volgens N° 330 zullen nu de twee evenwijdige vlakken U en W door het vlak V volgens evenwijdige rechten gesneden worden.

b. Het derde vlak W *loopt evenwijdig met* P Q. Dan moeten de snijlijnen van W met U en V elk volgens N° 320 || P Q zijn.

De drie vlakken snijden elkander in dit geval dus twee aan twee volgens evenwijdige rechten.

c. Het derde vlak W *snijdt* P Q *in een punt* S. Dan ligt S in elk der drie vlakken en dit punt zal dus ook tot de doorsnede van de vlakken U en W en tot de doorsnede van V en W moeten behooren.

De drie vlakken snijden elkander derhalve volgens drie in één punt samenkomende rechten S O, S Q, S R.

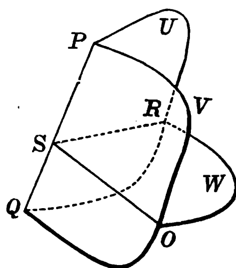


Fig. 358.

186. De figuur, gevormd door drie vlakken, die één punt gemeen hebben en aan de zijde hunner snijlijnen niet verlengd, maar overigens oneindig ver uitgebreid gedacht worden, heet drievlakshoek.

Het snijpunt der vlakken heet de top (S), de snijlijnen der vlakken, twee aan twee genomen, heeten de ribben (S A, S B en S C).

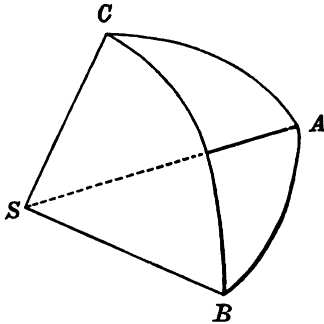


Fig. 359.

De hoeken, die in de drie vlakken, door elk paar ribben gevormd worden, heeten de zijden van den drievlakshoek (∟ B S C, ∟ C S A en ∟ A S B).

Eindelijk worden de standhoeken van de tweevlakshoeken, door ieder paar der begrenzende vlakken gevormd, de hoeken van den drievlakshoek genoemd. Is dus in fig. 360 P Q en P R ⊥ S B, dan noemt men ∟ Q P R een hoek van den drievlakshoek.

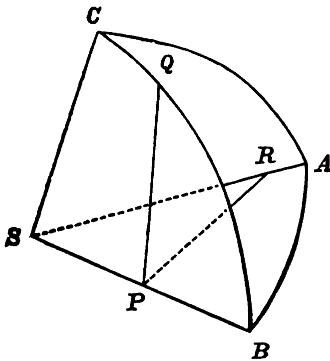


Fig. 360.

Een drievlakshoek wordt genoemd met vier letters, waarvan de eerste bij den top en de drie overige elk bij een der ribben geplaatst zijn, aldus: S A B C.

De zijden en hoeken van een drievlakshoek te zamen heeten de elementen.

187. Drie vlakken in hunne volledige uitgestrektheid vormen acht drievlakshoeken (fig. 361). Zijn A A′, B B′, C C′ de snijlijnen der vlakken, twee aan twee genomen, dan zijn

O A B C, O A B′ C,
O A′ B C, O A′ B′ C.
O A B C′, O A B′ C′.
O A′ B C′, O A′ B′ C′

deze acht drievlakshoeken.

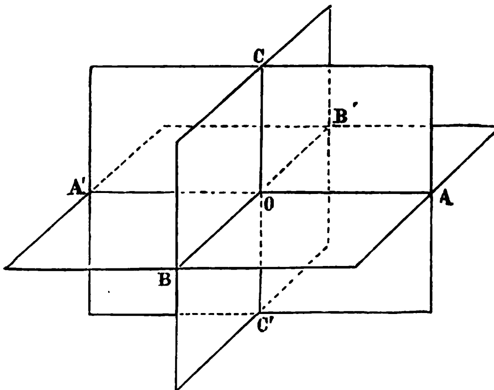


Fig. 361.

De elementen dezer acht figuren staan met elkander in nauw verband, zooals men gemakkelijk voor elk willekeurig gekozen paar bij beschouwing der figuur inziet.

In het bijzonder is dit het geval met de elementen der beide drievlakshoeken, welke zoodanig gelegen zijn, dat de ribben van den eenen de verlengden van die van den anderen zijn. Twee dergelijke drievlakshoeken heeten tegengesteld (fig. 362). Men ziet gemakkelijk de juistheid der navolgende eigenschap in:

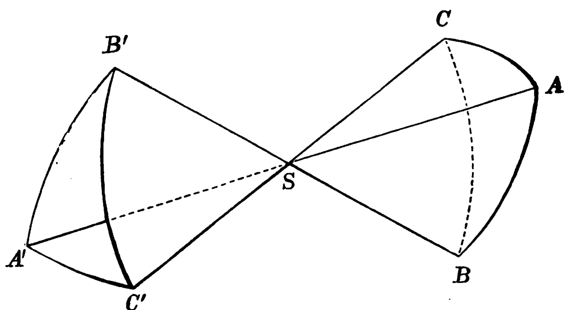


Fig. 362.

Eigenschap 346. *Een drievlakshoek en de tegengestelde drievlakshoek hebben de elementen twee aan twee gelijk.*

188. Een andere drievlakshoek, die met een gegeven drievlakshoek S A B C in nauw verband staat, wordt verkregen door uit een punt S', *daarbinnen gelegen*, loodlijnen op de begrenzende vlakken van den drievlakshoek neer te laten.

In fig. 363 stelle men zich dus voor, dat

S' A' $\perp$ het vlak B S C,
S' B' $\perp$ het vlak C S A,
S'C' $\perp$ het vlak A S B

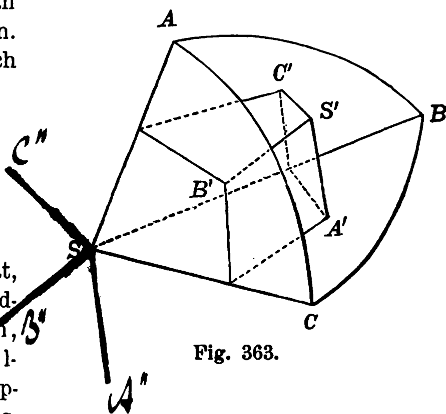


Fig. 363.

is. De drievlakshoek, die ontstaat, indien men door deze drie loodlijnen, twee aan twee genomen, vlakken brengt, heet de pooldrievlakshoek of de supplementaire drievlakshoek van den oorspronkelijken. Men zegt ook wel, dat S' A' B' C' de poolfiguur van S A B C is.

Eigenschap 347. *De oorspronkelijke drievlakshoek is de poolfiguur van den pooldrievlakshoek.*

Bewijs: (Zie fig. 363). Om dit aan te toonen, heeft men slechts te laten zien, dat de ribben van S A B C loodrecht staan op de vlakken van S' A' B' C', dus b. v. dat S C $\perp$ het vlak A' S' B'.

Volgens de onderstelling is

$$S'A' \perp \text{het vlak } BSC, \text{ dus } S'A' \perp SC,$$
$$S'B' \perp \text{het vlak } CSA, \text{ dus } S'B' \perp SC,$$

zoodat S C loodrecht staat op twee rechten van het vlak A′ S′ B′.

Eigenschap 348. *De zijden van den pooldrievlakshoek zijn de supplementen der hoeken van den oorspronkelijken drievlakshoek.*

Te bewijzen in fig. 363: $\angle B'S'A' +$ de standhoek op $SC = 180°$.

Deze eigenschap is een onmiddellijk gevolg van N° 345, indien men deze op de vlakken A S C en B S C met de loodlijnen S′ B′ en S′ A′ toepast.

Opmerking: Daar volgens N° 347 S A B C de poolfiguur van S′ A′ B′ C′ is, zoo volgt uit N° 348 gelijktijdig, dat de zijden van den drievlakshoek S A B B de supplementen der hoeken van den drievlakshoek S′ A′ B′ C′ zijn, waardoor wij verkregen hebben

Eigenschap 349. *De hoeken van den pooldrievlakshoek zijn de supplementen van de zijden van den oorspronkelijken drievlakshoek.*

Duidt men de zijden van den drievlakshoek S A B C met *a*, *b*, *c* aan, zoodat

$$\angle BSC = a, \ \angle CSA = b, \ \angle ASB = c,$$

dan is dus in drievlakshoek S′ A′ B′ C′

de standhoek op $S'A' = 180° - a$,
„ „ „ $S'B' = 180° - b$,
„ „ „ $S'C' = 180° - c$,

en, indien men evenzoo de standhoeken, in den drievlakshoek S A B C op S A, S B, S C voorkomende, door A, B, C voorstelt, dan is

$$\angle B'S'C' = 180° - A, \ \angle C'S'A' = 180° - B, \ \angle A'S'B' = 180° - C.$$

189. Wij gaan nu over tot de eigenschappen van één drievlakshoek.

Eigenschap 350. *De som van twee zijden van een drievlakshoek is grooter dan de derde zijde.*

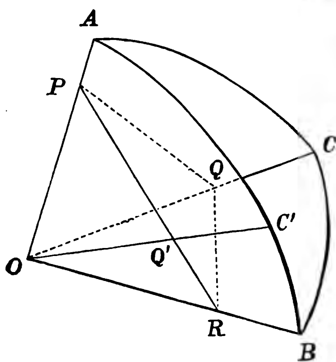


Fig. 364.

Men heeft natuurlijk slechts aan te toonen, dat, indien $\angle AOB$ de grootste zijde van den drievlakshoek O A B C is,

$$\angle AOB < \angle BOC + \angle COA$$

zijn moet.

Bewijs: In plaats van het gestelde kan men ook bewijzen, dat

$$\angle AOB - \angle AOC < \angle BOC.$$

Men trekke dus in het vlak A O B binnen den hoek A O B een rechte O C′ zoodanig, dat

$$\angle AOC' = \angle AOC$$

is. Nu moet nog bewezen worden

$$\angle BOC' < BOC.$$

Hiertoe zullen wij trachten N⁰ 51 in toepassing te brengen, d. i. wij zullen trachten twee driehoeken te vormen, waarin de hoeken B O C′ en B O C voorkomen, terwijl de zijden, welke in die driehoeken om de genoemde hoeken gelegen zijn, gelijk zijn. Men neme dus op O B een willekeurig stuk O R, op O C en O C′ de gelijke stukken O Q en O Q′ en verbinde R met Q en Q′. Beschouwt men nu de driehoeken R O Q en R O Q′, die twee paren zijden gelijk hebben, dan blijft nog de grootte van R Q en R Q′ te onderzoeken. Te dien einde verlenge men R Q′, tot zij O A in P snijdt en verbinde P met Q. Nu is

$$\triangle POQ' \cong \triangle POQ;$$

dus $PQ = PQ'$. Verder is in $\triangle PQR$

$$PQ + QR > PR,$$
$$PQ \quad = PQ'$$

dus door aftrekking $QR > Q'R.$

De driehoeken Q O R en Q′ O R hebben nu twee paren zijden gelijk, terwijl de derde zijde van den eersten grooter is dan die van den tweeden, dus volgens N⁰ 51

$$\llcorner QOR > \llcorner Q'OR,$$
$$\llcorner POQ = \llcorner POQ',$$

dus door optelling $\llcorner AOC + \llcorner COB > \llcorner AOB.$

Eigenschap 351. *De som van de drie zijden van een drievlakshoek is kleiner dan twee gestrekte hoeken.*

Te bewijzen:

$\llcorner BSC + \llcorner CSA + \llcorner ASB < 360°.$

Bewijs: Brengt men een snijvlak aan, dat de drie ribben snijdt in P, Q, R, dan zijn deze punten de toppen der drievlakshoeken

P Q R S, Q R P S, R P Q S.

Past men in elk dezer de vorige eigenschap toe, dan ontstaan de volgende vergelijkingen

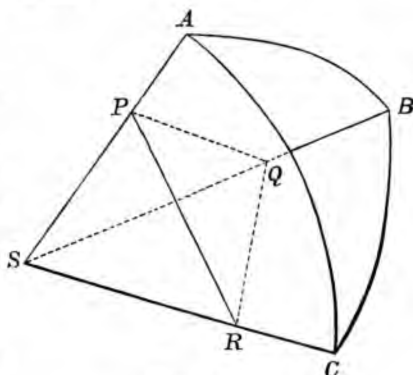


Fig. 365.

$$\llcorner QRP < \llcorner QRS + \llcorner PRS,$$
$$\llcorner PQR < \llcorner SQP + \llcorner SQR,$$
$$\llcorner RPQ < \llcorner RPS + \llcorner QPS,$$

dus door optelling

$$180^\circ < (\angle RPS + \angle SRP) + (\angle SPQ + \angle SQP) + (\angle SQR + \angle SRQ),$$

of

$$180^\circ < (180^\circ - \angle RSP) + (180^\circ - \angle PSQ) + (180^\circ - \angle QSR),$$

dus

$$\angle RSP + \angle PSQ + \angle QSR < 360^\circ.$$

190. Uit de twee vorige eigenschappen, die op de zijden van een drievlakshoek betrekking hebben, kan men met behulp van den pooldrievlakshoek eigenschappen der hoeken afleiden.

Duiden wij evenals in § 188 de zijden van den drievlakshoek door a, b, c aan, dan zullen wij die van den pooldrievlakshoek door a_p, b_p, c_p aangeven, zoodat dus in fig. 363

$$\angle B'S'C' = a_p, \quad \angle C'S'A' = b_p, \quad \angle A'S'B' = c_p$$

is. Evenzoo stellen wij de hoeken dier figuren door A, B, C en A_p, B_p, C_p voor, dan is volgens N° 350, indien men deze eigenschap op den pooldrievlakshoek toepast,

$$a_p + b_p > c_p.$$

Maar in verband met § 188 is

$$a_p = 180^\circ - A, \quad b_p = 180^\circ - B, \quad c_p = 180^\circ - C,$$

dus

$$180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C,$$

of

$$180^\circ - A > B - C.$$

Wij hebben hierdoor dus de navolgende eigenschap verkregen:

Eigenschap 352. *Het supplement van een der hoeken van een drievlakshoek is grooter dan het verschil der beide andere hoeken.*

Ter afleiding eener andere eigenschap van de hoeken van een drievlakshoek passen wij N° 351 op den pooldrievlakshoek toe, waardoor wij verkrijgen

$$a_p + b_p + c_p < 360^\circ,$$

en hieruit volgt dan

$$(180^\circ - A) + (180^\circ - B) + (180^\circ - C) < 360^\circ,$$

of

$$A + B + C > 180^\circ.$$

dus in woorden:

Eigenschap 353. *De som der hoeken van een drievlakshoek is grooter dan een gestrekte hoek.*

De laatste eigenschap, die ook in de navolgende gedaante geschreven kan worden

$$B + C > 180^\circ - A$$

voert ons tot een aanvulling van eigenschap 352, namelijk

Eigenschap 354. *Het supplement van een der hoeken van een drievlakshoek is kleiner dan de som der beide andere.*

191. De eigenschappen 350 en 351 vertoonen volkomen overeenstemming met de bij den driehoek voorkomende stellingen. Hetzelfde geldt van de navolgende eigenschappen, die op de zijden en hoeken te zamen van één drievlakshoek betrekking hebben. En in het algemeen bestaat in menig opzicht, zooals ook in het volgende hoofdstuk nog blijken zal, overeenstemming tusschen den drievlakshoek in de ruimte en den driehoek in het platte vlak.

Eigenschap 355. *Als een drievlakshoek twee gelijke zijden heeft, dan zijn de hoeken, die aan de derde zijde liggen, gelijk.*

Gegeven:

∟ B S A = ∟ C S A.

Te bewijzen:

Een standhoek op S C = een standhoek op S B.

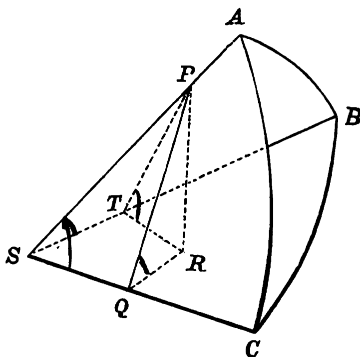


Fig. 366.

Bewijs: Wij construeeren standhoeken op S C en S B volgens § 183 en kiezen daartoe een willekeurig punt P op S A, waaruit wij loodlijnen P Q, P T en P R op S C, S B en het vlak C S B neerlaten. Dan zijn de hoeken P Q R en P T R de standhoeken op S C en S B.

Nu is

$$\triangle PSQ \cong \triangle PST,$$

want zij hebben P S gemeen en verder is

∟ P S Q = ∟ P S T

volgens het onderstelde en

∟ P Q S = ∟ P T S = 90°.

Dus is

$$PQ = PT.$$

Maar dan is

$$\triangle PQR \cong \triangle PTR,$$

omdat zij P R gemeen hebben en bovendien

P Q = P T, ∟ P R Q = ∟ P R T = 90°

is. Derhalve

∟ P T R = ∟ P Q R,

dus de standhoek op S B = dien op S C.

Op dezelfde wijze bewijst men het omgekeerde dezer stelling:

Eigenschap 356. *Als een drievlakshoek twee gelijke hoeken heeft, dan zijn de zijden, die daarover gelegen zijn, gelijk.*

Eigenschap 357. *In een drievlakshoek ligt over een grootere zijde een grootere hoek.*

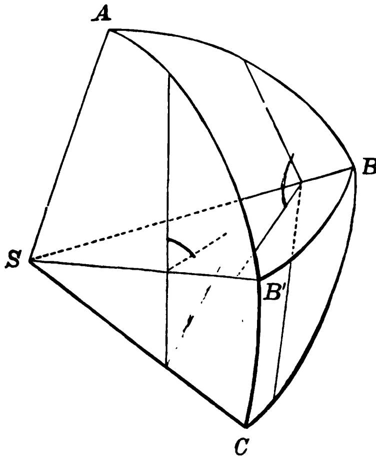


Fig. 367.

Gegeven: ∟ A S C > ∟ A S B.

Te bewijzen:

Een standhoek op S B >
een standhoek op S C.

Bewijs: Volgens het ondersteld kan men in het vlak A S C en binnen den hoek A S C een rechte S B′ trekken, zóó dat

∟ A S B′ = ∟ A S B.

Als nu een vlak door S B en S B′ gebracht wordt, ontstaan twee drievlakshoeken S A B B′ en S B B′ C waarvan de eerste gelijkbeenig is, zoodat

in drievlakshoek S A B B′ de standhoek op S B′ = dien op S B . . (1)

De eerste dezer standhoeken is echter het supplement van den standhoek op S B′ in den drievlakshoek S B B′ C; dus is volgens N⁰ 352

de standhoek op S B′ in S A B B′ > de standhoek op S C —
den standhoek op S B in S B B′ C.

In verband met (1) is dus ook

de standhoek op S B in S A B B′ > de standhoek op S C —
den standhoek op S B in S B B′ C,

of, als men den laatsten term naar het eerste lid overbrengt,

de som der standhoeken op S B in S A B B′ en S B B′ C >
de standhoek op S C,

of ten slotte

de standhoek op S B in S A B C > de standhoek op S C.

Het omgekeerde van deze eigenschap kan evenals in de planimetrie indirect bewezen worden.

Vraagstukken.

793. Bewijs N⁰ 351 ook door bij een drievlakshoek S A B C een der ribben, b. v. S A, te verlengen aan de zijde van S en op den nieuwen drievlakshoek S A′ B C N⁰ 350 toe te passen.

794. Als twee zijden van een drievlakshoek recht zijn, dan zijn de overstaande hoeken ook recht en de derde zijde is gelijk aan den derden hoek.

795. Kunnen de zijden van een drievlakshoek zijn 100°, 120° en 140°? of 80°, 170° en 70°?

796. Een plat vlak, dat gelijke stukken van de ribben van een gelijkzijdigen drievlakshoek afsnijdt, snijdt de drie zijden volgens een gelijkzijdigen driehoek.

797. Als de drie zijden van een drievlakshoek recht zijn en door een vlak volgens een driehoek gesneden worden, waarvan de zijden $\sqrt{89}$, $2\sqrt{41}$ en $5\sqrt{5}$ zijn, bepaal dan de stukken, die dat vlak van de ribben afsnijdt.

798. Zijn de drie zijden van een drievlakshoek recht en wordt de top op een willekeurig snijdend vlak geprojecteerd, dan is die projectie het hoogtepunt van den driehoek, volgens welken de zijden van den drievlakshoek door het vlak gesneden worden.

799. Een drievlakshoek heeft drie rechte hoeken. Bewijs, dat geen enkel vlak de drie zijden volgens een rechthoekigen driehoek snijden kan.

800. De hoek, dien een ribbe van een drievlakshoek met de niet aan die ribbe gelegen (overstaande) zijde vormt, is grooter dan de helft van het verschil tusschen de som der beide aan die ribbe gelegen zijden en de derde zijde.

801. De som der hoeken, die de ribben van een drievlakshoek met de overstaande zijden vormen, is kleiner dan de som der zijden en grooter dan hare halve som.

802. Als twee drievlakshoeken een zijde gemeen hebben en de eene drievlakshoek door den anderen omsloten wordt, dan is de som van de twee andere zijden bij den eersten kleiner dan bij den tweeden.

803. In een gelijkbeenigen drievlakshoek deelt het vlak, dat door de over de basis gelegen ribbe loodrecht op het overstaande zijvlak gebracht wordt, dit zijvlak middendoor.

804. Kan een drievlakshoek met zijn pooldrievlakshoek in de zijden en in de hoeken overeenstemmen?

805. Bewijs N⁰ 353 door gebruik te maken van vraagstuk 767 en zonder den pooldrievlakshoek te hulp te nemen.

806. Elk standvlak op één der ribben van een rechthoekigen drievlakshoek snijdt deze figuur volgens een rechthoekigen driehoek.

HOOFDSTUK XXXIV.

GELIJK- EN GELIJKVORMIGHEID VAN DRIEVLAKSHOEKEN.

192. Men noemt twee drievlakshoeken gelijk- en gelijkvormig, als alle elementen van den eenen gelijk zijn aan de overeenkomstige elementen van den anderen.

Het is duidelijk, dat twee drievlakshoeken gelijk- en gelijkvormig zijn zullen, als de eene in de plaats van den anderen gesteld kan worden. Doch ook zonder dat dit laatste mogelijk is, kan toch gelijkheid van de elementen voorkomen. Een voorbeeld vindt men hiervan bij een

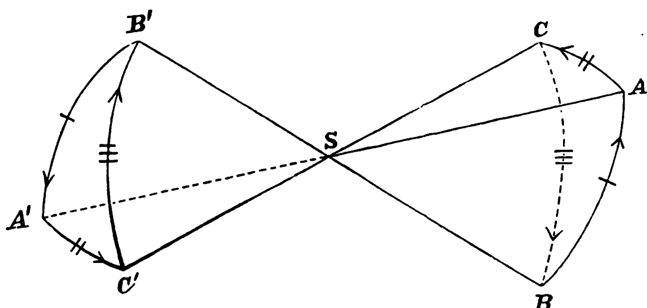


Fig. 368.

drievlakshoek en diens tegengestelden, die volgens N° 346 in de elementen overeenstemmen. Wanneer men namelijk den drievlakshoek S A' B' C' allereerst zoo draait, dat zijn opening naar dezelfde zijde gekeerd wordt als bij den drievlakshoek S A B C, en dat S A' en S A aan dezelfde zijde van de vlakken S B' C' en S B C komen te liggen, dan zal S B' liggen aan dezelfde zijde als S C en S C' aan dezelfde zijde als S B, en wanneer men nu den hoek B' S C' op C S B geplaatst denkt, dan zal wegens de ongelijkheid der standhoeken op S B' en S C het vlak A' S B' de zijde A S C *niet* kunnen bedekken.

De oorzaak van dit feit ligt klaarblijkelijk in de volgorde, waarin

de gelijke elementen in de beide figuren voorkomen. Beschouwt men beide van dezelfde zijde, b. v. binnen elk der drievlakshoeken staande naar den top S ziende, dan volgen de zijden C S B, B S A, A S C van den eenen in denzelfden zin, waarin de wijzers van een uurwerk zich bewegen, terwijl de daaraan gelijke zijden C′ S B′, B′ S A′, A′ S C′ in tegengestelden zin op elkander volgen.

Men is nu gewoon bij de gelijk- en gelijkvormigheid twee gevallen te onderscheiden, naarmate de gelijke elementen in dezelfde orde voorkomen óf in tegengestelde orde en duidt deze dan met de namen congruentie en symmetrie aan.

Uit het voorgaande volgt dus onmiddellijk:

Eigenschap 358. *Een drievlakshoek en zijn tegengestelde zijn symmetrisch.*

Verder is duidelijk, dat elke drievlakshoek, die congruent is met den tegengestelden drievlakshoek, evenzeer symmetrisch met den oorspronkelijken drievlakshoek zijn moet en dat daarentegen een drievlakshoek, die symmetrisch is met den tegengestelden drievlakshoek, congruent is met den oorspronkelijken. Hiervan maken wij in het volgende herhaaldelijk gebruik.

193. Bij het behandelen der gevallen van de gelijk- en gelijkvormigheid heeft men telkens de onderstellingen, dat er overeenstemming of verschil in volgorde bij de gelijke elementen bestaat, afzonderlijk te bespreken.

Eigenschap 359. *Twee drievlakshoeken zijn gelijk- en gelijkvormig* (congruent of symmetrisch), *als twee zijden en de ingesloten hoek van den eenen drievlakshoek gelijk zijn aan twee zijden en den ingesloten hoek van den anderen.*

Gegeven: ∟ A′ S′ B′ = ∟ A S B, ∟ B′ S′ C′ = ∟ B S C,
de standhoek op S′ B′ = dien op S B.

Te bewijzen: De drievlakshoek S′ A′ B′ C′ is congruent of symmetrisch met den drievlakshoek S A B C.

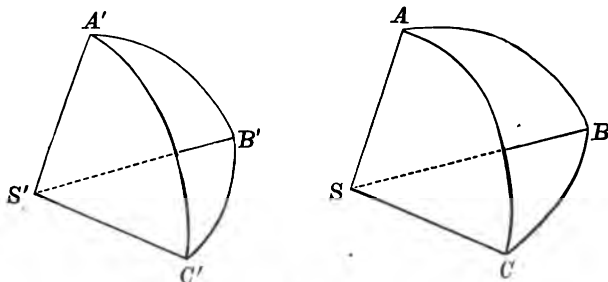


Fig. 369.

a. de volgorde der gelijke elementen is dezelfde.

Bewijs: Men toont gemakkelijk aan, dat de eene figuur met de andere tot samenvalling kan gebracht worden. Immers, indien men S′ A′ B′ C′ zoodanig plaatst, dat S′ in S, S′ B′ langs S B en het vlak A′ S′ B′ op het vlak A S B valt, dan komt S′ A′ langs S A en het vlak B′ S′ C′ op B S C te liggen wegens het gegevene en hieruit volgt dan evenzeer weder, dat S′ C′ langs S C moet komen.

b. de volgorde der gelijke elementen is tegengesteld.

Bewijs: Construeert men den tegengestelden drievlakshoek S′ A″ B″ C″

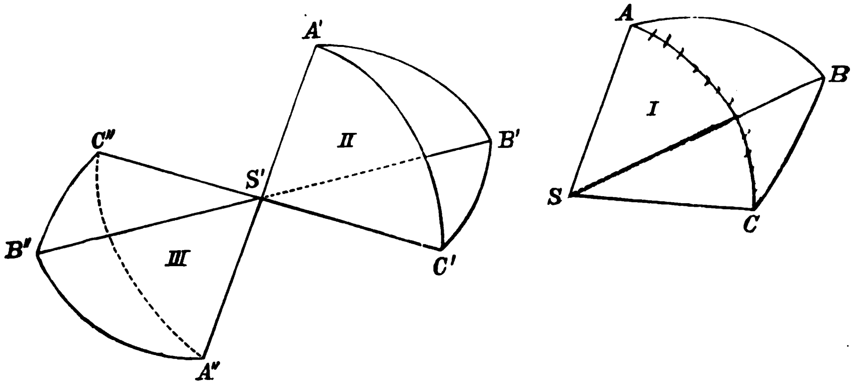


Fig. 370.

van S′ A′ B′ C′ en duidt men de drievlakshoeken S A B C, S′ A′ B′ C′, S′ A″ B″ C″ kortheidshalve door I, II, III aan, dan geldt het volgende:

I en II hebben twee zijden met den ingesloten hoek gelijk, en de gelijke elementen hebben tegengestelde volgorde;

III en II hebben alle elementen gelijk en de gelijke elementen hebben tegengestelde volgorde;

dus

I en III hebben twee zijden met den ingesloten hoek gelijk en de volgorde der gelijke elementen is dezelfde.

Hieruit besluit men, dat I en III congruent zijn, maar III is symmetrisch met II, dus is I ook symmetrisch met II.

Op volkomen gelijke wijze behandelt men

Eigenschap 360. *Twee drievlakshoeken zijn gelijk- en gelijkvormig, als een zijde met de beide aanliggende hoeken van den eenen gelijk zijn aan een zijde met de beide aanliggende hoeken van den anderen.*

Hiervan afwijkend echter wordt het derde geval behandeld.

Eigenschap 361. ***Twee drievlakshoeken zijn gelijk- en gelijkvormig, als de drie zijden van den eenen drievlakshoek gelijk zijn aan de drie zijden van den anderen.***

Wij bespreken nu namelijk eerst het geval van symmetrie:

Gegeven: ∟ A S B = ∟ A′ S′ B′,
∟ B S C = ∟ B′ S′ C′,
∟ C S A = ∟ C′ S′ A′.

Te bewijzen: De drievlakshoek S A B C is symmetrisch of congruent met S′ A′ B′ C′.

a. de volgorde der gelijke elementen is tegengesteld.

Bewijs: Men kan altijd den drievlakshoek S A B C zoo gedraaid

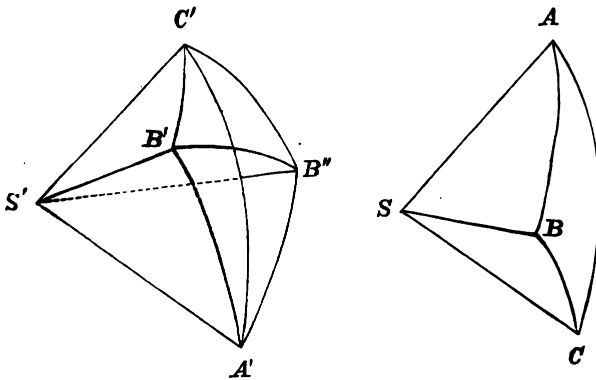


Fig. 371.

denken, dat, terwijl de opening van de beide drievlakshoeken naar dezelfde zijde gekeerd blijft, de ribben S B en S′ B′ aan tegengestelde kanten van de zijden A S C en A′ S′ C′ komen te liggen en daarna die zijvlakken zoodanig plaatsen, dat zij elkander volkomen bedekken. Men ziet dus gemakkelijk in, dat S C langs S′ C′ en S A langs S′ A′ moet vallen en dat het vlak B S C, dat gelijk is aan B′ S′ C′, daarmede dus de ribbe S′ C′ gemeen zal verkrijgen, terwijl evenzoo de gelijke vlakken A S B en A′ S′ B′ met de ribbe S′ A′ aan elkander zullen sluiten. S B verkrijgt den met S′ B″ aangeduiden stand.

Brengt men nu een vlak door S′ B′ en S′ B″, dan zijn twee gelijkbeenige drievlakshoeken S′ B′ C′ B″ en S′ B′ A′ B″ ontstaan. Dus is volgens N° 355

De standhoek op de ribbe S′ B′ in S′ B′ C′ B″ =
dien op de ribbe S′ B″ in S′ B′ C′ B″

en

De standhoek op de ribbe $S'B'$ in $S'B'A'B'' =$
dien op de ribbe $S'B''$ in $S'B'A'B''$,

dus door optelling

De standhoek op de ribbe $S'B'$ in $S'A'B'C' =$
dien op de ribbe $S'B''$ in $S'A'B''C'$,

zoodat de eerste dezer standhoeken ook gelijk moet zijn aan den standhoek op de ribbe SB in $SABC$.

De gegeven drievlakshoeken hebben nu twee paren zijden met den ingesloten hoek gelijk, terwijl de gelijke elementen in tegengestelde orde op elkander volgen, derhalve zijn zij volgens N° 359 symmetrisch.

b. de volgorde der gelijke elementen is dezelfde.

Bewijs: Duidt men evenals in fig. 370 de gegeven drievlakshoeken met I en II en den tegengestelden drievlakshoek van II met III aan, dan geldt het volgende:

I en II hebben drie zijden gelijk, en de gelijke elementen hebben dezelfde volgorde;

II en III hebben alle elementen gelijk, en de gelijke elementen hebben tegengestelde volgorde;

dus

I en III hebben drie zijden gelijk en de gelijke elementen hebben tegengestelde volgorde.

Volgens het geval *a* zijn de figuren I en III dus symmetrisch, en omdat II en III ook symmetrisch zijn, moeten I en II congruent zijn.

Eigenschap 362. *Twee drievlakshoeken zijn gelijk- en gelijkvormig, als de drie hoeken van den eenen drievlakshoek gelijk zijn aan de drie hoeken van den anderen.*

Wij kunnen hier de gevallen van congruentie en symmetrie te zamen behandelen. Daartoe denken wij bij elken der gegeven drievlakshoeken de poolfiguur geconstrueerd. Duidt men nu de elementen van de gegeven drievlakshoeken met a, b, c; A, B, C en a', b', c'; A', B', C' aan en die van de daarbij behoorende poolfiguren met a_p, b_p, c_p; A_p, B_p, C_p en a'_p, b'_p, c'_p; A'_p, B'_p, C'_p, dan is gegeven:

$$A = A',\ B = B',\ C = C',$$

en uit de betrekkingen

$$A + a_p = 180°,\ A' + a'_p = 180°,$$
$$B + b_p = 180°,\ B' + b_p' = 180°,$$
$$C + c_p = 180°,\ C' + c_p' = 180°$$

volgt dus

$$a_p = a'_p,\ b_p = b'_p,\ c_p = c'_p,$$

zoodat de pooldrievlakshoeken in de drie zijden overeenstemmen en dus volgens het vorige geval $\cong$ zijn. Maar dan hebben deze poolfiguren dus ook gelijke hoeken, d. i. de betrekkingen bestaan:

$$A_p = A'_p,\ B_p = B'_p,\ C_p = C'_p,$$

en daar

$$A_p + a = 180°,\ A'_p + a' = 180°,$$
$$B_p + b = 180°,\ B_p' + b' = 180°,$$
$$C_p + c = 180°,\ C_p' + c' = 180°,$$

is dus ook

$$a = a',\ b = b',\ c = c',$$

zoodat de oorspronkelijke drievlakshoeken de drie zijden gelijk hebben en dus volgens N⁰ 361 $\cong$ zijn.

194. Uit het vorige blijkt nu de eigenschap

Eigenschap 363. ***Een drievlakshoek is door drie zijner elementen benevens de volgorde, waarin deze voorkomen, volkomen bepaald.***

Het is dus mogelijk een drievlakshoek te construeeren, als daarvan gegeven zijn :

1⁰. twee zijden en de ingesloten hoek;
2⁰. één zijde met de beide aanliggende hoeken;
3⁰. de drie zijden;
4⁰. de drie hoeken.

Bovendien kan men ook een drievlakshoek construeeren, als gegeven zijn

5⁰. twee zijden en een hoek over één dier zijden;
6⁰. twee hoeken met een zijde over één dier hoeken, of, op andere wijze uitgedrukt, een zijde met een aanliggenden en een overstaanden hoek.

Hierbij zij opgemerkt, dat het tweede, vierde en zesde geval door middel van den pooldrievlakshoek tot het eerste, derde en vijfde geval zich laten terugbrengen.

Is b. v., om ons tot het zesde geval te bepalen, van een drievlakshoek S A B C gegeven

$$\llcorner\ BSC = a, \text{ een standhoek op } SB = B, \text{ die op } SA = A,$$

en denkt men den pooldrievlakshoek geconstrueerd, zoodat

$$a + A_p = 180°,\ B + b_p = 180°,\ A + a_p = 180°$$

is, dan zijn van dezen dus A_p, b_p en a_p bekend, d. z. twee zijden met een hoek over een dier zijden. Dus kunnen de elementen c_p, B_p, A_p volgens het vijfde geval geconstrueerd worden en de supplementen leveren dan de elementen C, b, a van den oorspronkelijken drievlakshoek.

Constructie van het eerste geval.

Gegeven: a, b, C.

Gevraagd: c, A, B.

Zij S A B C de gevraagde drievlakshoek. Men denkt de standhoeken C en B geconstrueerd volgens § 183 door uit een willekeurig punt P van S A loodlijnen P Q, P T en P R op S C, S B en het vlak B S C neer te laten en hare voetpunten Q, R en R, T te verbinden. Daar S P willekeurig is, zijn van $\triangle$ S P Q bekend

Fig. 372.

$$SP, \angle PSQ = b, \angle PQS = 1R,$$

dus zijn P Q en S Q te construeeren. Evenzoo is in $\triangle$ P Q R bekend:

$$PQ, \angle PQR = C, \angle PRQ = 90^\circ,$$

dus zijn P R en Q R te vinden. Van vierhoek S Q R T is bekend:

$$\angle BSC = a, SQ, \angle SQR = 90^\circ, QR \text{ en } \angle STR = 90^\circ,$$

dus kunnen T R en S T geconstrueerd worden, zoodat in $\triangle$ T P R twee zijden T R en P R, benevens $\angle$ T R P bekend zijn, waardoor $\angle$ R T P, d. i. de gevraagde hoek B gevonden kan worden.

Evenzoo kan uit $\triangle$ P S T, waarin S T, S P of T P en $\angle$ S T P bekend zijn, het zijvlak A S B $= c$ gevonden worden.

Dit deel der constructie is geheel in fig. 373 uitgevoerd.

Hierin zijn de gegeven zijvlakken a en b naast elkander in het vlak van teekening geconstrueerd, zoodat

Fig. 373.

$$\angle BSC = a \text{ en } \angle SCA = b$$

is. Uit een willekeurig punt P van S A is een loodlijn P Q op S C neer-

gelaten, zoodat deze na verlenging het eene been QR van den standhoek C oplevert. Hieraan is nu deze standhoek geconstrueerd. Beschrijft men daarna met PQ als straal een cirkelboog, die het tweede been van den standhoek in P_n snijdt en trekt men uit P_n een loodlijn op het verlengde van PQ, die dit verlengde in R ontmoet, dan stelt $\triangle P_n Q R$ in fig. 373 den driehoek PQR van fig. 372 voor.

Uit R is verder een loodlijn RT op SB neergelaten en een rechte evenwijdig aan SB getrokken. Maakt men $R P_n' = R P_n$ en trekt men $T P_n'$, dan stelt $\triangle T R P_n'$ in fig. 373 den driehoek TPR van fig. 372 voor, zoodat de hoek B gevonden is.

Verlengt men RT en beschrijft men om T een cirkel met den straal $T P_n'$, die het verlengde van RT in P′ snijdt, dan is $\triangle S P' T$ in fig. 373 dezelfde als de driehoek SPT in fig. 372 en $\llcorner P' S T$ is dus de gevraagde derde zijde van den drievlakshoek.

Om $\llcorner A$ te construeeren kan men dezelfde constructie toepassen, die wij voor $\llcorner B$ aangaven, waarbij men dan beginne den gegeven standhoek te teekenen, door uit een punt van SB loodlijnen op SC en op het vlak ASC neer te laten of men kan, nu de drie zijden bekend zijn, de bij het derde geval medegedeelde constructie toepassen.

Opmerking: Daar in fig. 373 $S P' = S P$ zijn moet, kan men de onbekende zijde ook bepalen, door, nadat R gevonden is, eenvoudig uit R een loodlijn RT op SB neer te laten en om S een cirkelboog met SP als straal te beschrijven. Het snijpunt van dezen cirkelboog met het verlengde van RT is dan P′.

Constructie van het tweede geval.

Gegeven: a, B, C

Gevraagd: b, c, A.

Indien men weder onderstelt, dat SABC (fig. 372) de gevraagde drievlakshoek is, waarin evenals hierboven de standhoeken C en B geteekend zijn, dan is bekend in $\triangle PQR$

$$PR \text{ (willekeurig)}, \llcorner PQR = C, \llcorner PRQ = 1R,$$

dus is QR en PQ te vinden. Nu is in $\triangle PTR$ bekend

$$PR, \llcorner PRT = 1R, \llcorner PTR = B,$$

dus is TR en TP te construeeren. Van vierhoek SQRT kent men nu

$$\llcorner TSQ = a, \llcorner STR \text{ en } \llcorner SQR = 1R, TR \text{ en } QR,$$

dus is deze bekend. Men kan daardoor SQ en ST vinden en weet nu van elk der driehoeken STP en SQP twee zijden en den ingesloten rechten hoek. Zoodoende worden

$$\llcorner ASB = c \text{ en } \llcorner ASC = b$$

bekend en het vraagstuk is nu tot het vorige teruggebracht, terwijl de derde standhoek ook kan geconstrueerd worden met behulp van het bij het volgende geval medegedeelde.

De constructie van *b* en *c* is in fig. 374 uitgevoerd.

Hierin is het gegeven zijvlak *a* in het vlak van teekening geconstrueerd, zoodat ∟ B S C = *a* is.

In de willekeurig op S B en S C aangenomen punten T′ en Q′ zijn

Fig. 374.

loodlijnen op S B en S C getrokken en hieraan zijn de gegeven standhoeken B en C uitgezet. Construeert men nu de rechthoekige driehoeken $T P_n' R'$ en $Q' P_n R''$ zoodanig, dat deze de rechthoekszijden $R' P_n'$ en $R'' P_n$ gelijk hebben, dan zijn de driehoeken T P R en Q P R van fig. 372 gevonden en door $P_n' R'$ en $P_n R''$ te verlengen, tot deze rechten elkander snijden, heeft men ook het punt R van fig. 372 bepaald. Trekt men dan R T en R Q loodrecht op S B en S C en maakt

$$T P' = T' P_n' \text{ en } Q P = Q' P_n,$$

dan zullen $\triangle$ S T P′ en $\triangle$ S Q P in fig. 374 de driehoeken S T P en S Q P van fig. 372 voorstellen, zoodat $\angle$ P′ S T gelijk is aan de gevraagde zijde c en $\angle$ Q S P $= b$.

Constructie van het derde geval.

Gegeven: a, b, c.

Gevraagd: A, B, C.

Is S A B C de gevraagde drievlakshoek, waarin P Q en P R $\perp$ S A getrokken zijn, dan is van $\triangle$ S P R bekend:

S P (willekeurig), $\angle$ S P R $= 90°$,
$\angle$ P S R $= b$,

Fig. 375.

dus is P R en S R te vinden. Evenzoo kan uit $\triangle$ S P Q ook P Q en S Q geconstrueerd worden en eindelijk vindt men uit $\triangle$ S Q R, waarin twee zijden S Q en S R en de ingesloten hoek bekend zijn, nog Q R. Nu zijn van $\triangle$ P Q R de drie zijden bekend en is dus $\angle$ Q P R of A te vinden.

Voor de uitvoering beschouwe men fig. 376.

Hierin zijn de drie gegeven zijvlakken c, a en b naast elkander in het vlak van teekening geconstrueerd, zoodat

$\angle$ A S B $= c$, $\angle$ B S C $= a$,
$\angle$ C S A′ $= b$·

is. Men neme nu op S A en S A′ de willekeurige maar gelijke stukken S P en S P′ en richte in P en P′ loodlijnen op S A en S A′ op, die S B en S C in R en Q snijden, dan stellen $\triangle$ S P R en S P′ Q de driehoeken S P R en S P Q van fig. 375 voor. Beschrijft men nu uit R en Q cirkels met de stralen R P en Q P′, die elkander in A_n snijden, dan zal $\angle$ R A_n Q de gevraagde standhoek op de ribbe S A zijn.

Fig. 376.

Constructie van het vijfde geval.

Gegeven: a, b, B.

Gevraagd: c, A, C.

Zij S A B C de gevraagde drievlakshoek. Wij construeeren nu den gegeven standhoek door uit een willekeurig punt P van de ribbe S C, die aan de twee gegeven zijvlakken a en b gemeen is, loodlijnen P R, P Q en P T neer te laten op het vlak A S B en de ribben S B en S A en het voetpunt R met de beide andere voetpunten Q en T te verbinden. Nu zijn van △ S P Q bekend

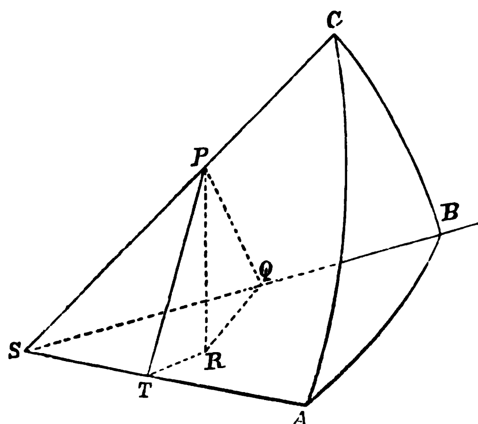


Fig. 377.

S P (willekeurig),

∟ S Q P = 90°

en ∟ P S Q = a,

waardoor P Q en S Q te vinden is.

Van △ P Q R zijn dan bekend

P Q, ∟ P Q R = B, ∟ P R Q = 90°,

zoodat ook P R en R Q gevonden kunnen worden.

Verder is van △ S P T bekend

S P, ∟ P S T = b, ∟ P T S = 90°,

zoodat P T geconstrueerd kan worden en dus is nu uit

P T, P R en ∟ T R P = 90°

ook R T te vinden, benevens de onbekende standhoek P T R.

Ten slotte kan vierhoek S Q R T geheel geconstrueerd worden, daar men alle zijden benevens de rechte hoeken ∟ S Q R en ∟ S T R kent. Men verkrijgt dus de volgende constructie:

Construeer in het vlak van teekening ∟ C S B = a (fig. 378).

Laat uit een willekeurig punt P van S C een loodlijn P Q op S B neer. Construeer aan het verlengde een hoek D Q E = B. Maak Q P′ = Q P en trek P′ R ⊥ Q D, dan is het punt R van fig. 377 gevonden. Maak verder ∟ A S C = b en laat uit P de loodlijn P T op A S neer, waardoor △ S P T van fig. 377 gevonden is. Beschrijf nu,

ten einde den driehoek P T R van fig. 377 te vinden, om P′ een cirkel met den straal P T, die B D in T′ snijdt, dan is R T′ gelijk aan de rechte R T van fig. 377. Nu beschrijve men om R met R T′ als straal een cirkel en trekke uit S een raaklijn S A′ daaraan, dan vormt

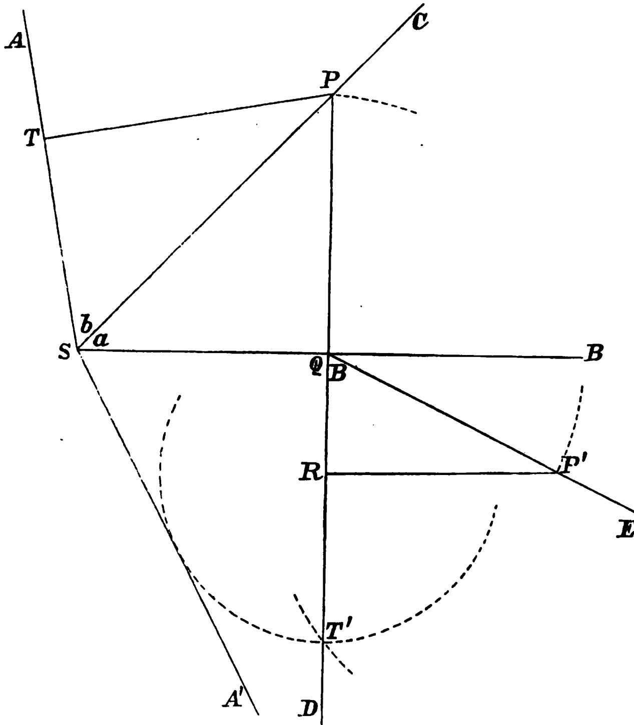


Fig. 378.

deze met S B een hoek, die gelijk is aan de onbekende zijde A S B van fig. 377.

Opmerking: Uit de constructie blijkt, dat het aantal drievlakshoeken, dat aan de vraag voldoet, twee, een of nul kan bedragen, naar gelang van het aantal raaklijnen, dat men uit S aan den om R beschreven cirkel kan trekken. Hierop gaan wij hier echter niet verder in.

Vraagstukken.

807. Bewijs, dat het vlak, dat in een gelijkbeenigen drievlakshoek den tweevlakshoek tegenover de basis middendoor deelt, die zijde loodrecht halveert.

808. Evenzoo, dat het vlak, dat door de over de basis liggende ribbe en de deellijn der basis gebracht wordt, loodrecht op de basis staat en den tophoek halveert.

809. Bewijs, dat twee rechthoekige drievlakshoeken congruent of symmetrisch zijn, als een rechthoekszijde en de schuine zijde van den eenen drievlakshoek gelijk zijn aan de overeenkomstige elementen van den anderen.

810. Bewijs, dat het vlak, dat in een gelijkbeenigen drievlakshoek door de over de basis liggende ribbe loodrecht op de basis gebracht wordt, den tophoek halveert.

811. Als twee drievlakshoeken twee zijden gelijk hebben en de ingesloten hoek bij den eenen grooter is dan die bij den anderen, dan is ook de derde zijde van den eersten drievlakshoek grooter dan de derde zijde van den tweeden.

812. Laat men uit een punt D van de ribbe T A van drievlakshoek T A B C een loodlijn op het vlak B T C neer, die dat vlak in E ontmoet, en verlengt men D E met een stuk E D′ = E D, dan is drievlakshoek T B C D′ symmetrisch met drievlakshoek T B C A.

813. Twee drievlakshoeken zijn congruent of symmetrisch, als zij een zijde en een daaraan liggenden hoek, benevens de som van de beide andere zijden gelijk hebben.

814. Construeer de onbekende elementen van een rechthoekigen drievlakshoek, als gegeven zijn:

a. de beide rechthoekszijden;
b. een rechthoekszijde en de schuine zijde;
c. een rechthoekszijde met den aanliggenden hoek;
d. een rechthoekszijde met den overliggenden hoek;
e. de schuine zijde en een der aanliggende hoeken.

815. Construeer een drievlakshoek, als gegeven zijn de basis, de som der opstaande zijden en de tophoek.

816. Evenzoo, als gegeven zijn de basis, het verschil der opstaande zijvlakken en de kleinste der aan de basis gelegen hoeken.

HOOFDSTUK XXXV.

DE VEELVLAKSHOEK.

195. De figuur, gevormd door de opeenvolgende snijding van een willekeurig aantal vlakken, die één punt gemeen hebben, wordt veelvlakshoek genoemd. Het gemeenschappelijk punt heet top. De snijlijnen van elke twee opeenvolgende vlakken worden de ribben genoemd, terwijl de hoeken, die door de ribben in de begrenzende vlakken gevormd worden, de zijden en de standhoeken tusschen elke twee opeenvolgende vlakken de hoeken van den veelvlakshoek heeten.

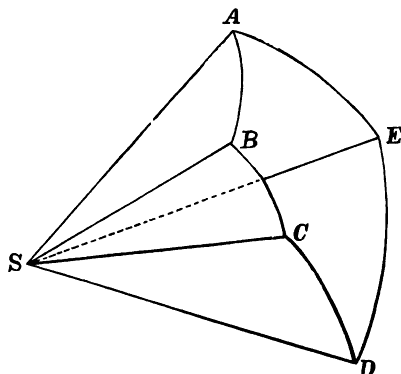


Fig. 379.

Wij beschouwen in het volgende alleen veelvlakshoeken, in welke inspringende hoeken *niet* voorkomen.

Elk vlak, dat door twee ribben gaat, die niet in één zijvlak gelegen zijn, heet diagonaalvlak.

Evenals voor een veelhoek in de planimetrie bewijst men

Eigenschap 364. *Door één ribbe van een n-vlakshoek gaan* $n-3$ *diagonaalvlakken*;

Eigenschap 365. *Het geheele aantal diagonaalvlakken in een n-vlakshoek bedraagt* $\frac{1}{2}n(n-3)$;

Eigenschap 366. *De diagonaalvlakken, die door één ribbe van een n-vlakshoek gaan, verdeelen dezen in* $n-2$ *drievlakshoeken.*

Aangezien de hoeken van deze drievlakshoeken te zamen de hoeken van den n-vlakshoek vormen, verkrijgt men in verband met N[0] 353:

Eigenschap 367. *De som der hoeken van een n-vlakshoek is grooter dan* $(n-2)$ *gestrekte hoeken.*

Wij voegen hieraan nog de twee navolgende eigenschappen toe:

Eigenschap 368. ***Elke zijde van een n-vlakshoek is kleiner dan de som van al de andere.***

Te bewijzen:

$$\angle ASB < \angle BSC + \angle CSD + \angle DSE + \angle ESA.$$

Bewijs: Brengt men al de diagonaalvlakken aan, die door de ribbe SB gaan, dus de vlakken BSD en BSE, dan is

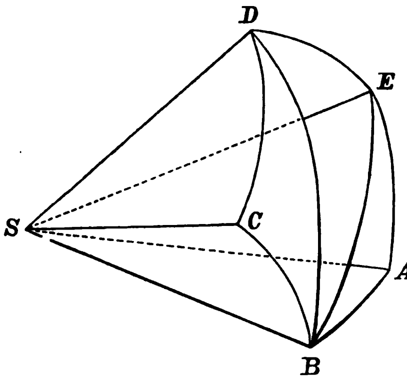


Fig. 380.

in drievlakshoek SBAE: $\angle ASB < \angle BSE + \angle ESA$,

in drievlakshoek SBDE: $\angle BSE < \angle BSD + \angle DSE$,

in drievlakshoek SBCD: $\angle BSD < \angle BSC + \angle CSD$,

en door optelling ontstaat de eigenschap, die bewezen moest worden, daar de ter weerszijden voorkomende termen $\angle BSE + \angle BSD$ elkander opheffen.

Eigenschap 369. ***De som der zijden van een n-vlakshoek is kleiner dan twee gestrekte hoeken.***

Bewijs: Brengt men een willekeurig vlak aan, dat de zijden volgens den veelhoek ABCDE snijdt, dan is elk hoekpunt van dezen veelhoek de top van een drievlakshoek. Past men nu in elk dezer drievlakshoeken N° 350 toe, dan heeft men:

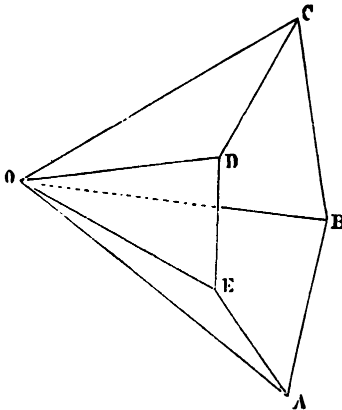


Fig. 381.

In ABEO:
$\angle EAB < \angle EAO + \angle OAB$,
In BCAO:
$\angle ABC < \angle ABO + \angle OBC$,
In CDBO:
$\angle BCD < \angle BCO + \angle OCD$,
In DECO:
$\angle CDE < \angle CDO + \angle ODE$,
In EADO:
$\angle DEA < \angle DEO + \angle OEA$,

dus door optelling:

de som der hoeken van den veelhoek A B C D E
$<$ de som der basishoeken van de driehoeken, die O tot top hebben.

Door nu op elk dezer laatste driehoeken de eigenschap toe te passen, die voor $\triangle$ O E A ligt opgesloten in de vergelijking

$$\angle OEA + \angle OAE = 180^\circ - \angle EOA,$$

vindt men uit de vorige ongelijkheid:

de som der hoeken van den vijfhoek A B C D E
$< 5 \times 180^\circ$ — de som der zijden van den vijfvlakshoek.

Derhalve in het algemeen

$(n - 2)\, 180^\circ < n \times 180^\circ$ — de som der zijden van den n-vlakshoek

en hieruit volgt

de som der zijden van den n-vlakshoek $< 2 \times 180^\circ$.

196. Men noemt twee veelvlakshoeken gelijk- en gelijkvormig, als zij in alle elementen overeenstemmen. Hieruit volgt dan onmiddellijk, dat twee veelvlakshoeken congruent zullen zijn, indien zij door de diagonaalvlakken, die door één ribbe gaan, verdeeld worden in drievlakshoeken, die twee aan twee congruent zijn en op dezelfde wijze aan elkander sluiten.

De gelijk- en gelijkvormigheid van veelvlakshoeken wordt verder op dezelfde wijze behandeld als die van veelhoeken in de planimetrie, zoodat wij niet langer hierbij zullen stilstaan.

Vraagstukken.

817. De som der diagonaalvlakken van een viervlakshoek is kleiner dan de som en grooter dan de halve som der zijden.

818. De som van de supplementen der hoeken van een n-vlakshoek is minder dan twee gestrekte hoeken.

819. Men vraagt een viervlakshoek zoodanig door een plat vlak te snijden, dat de doorsnede een parallelogram is.

820. Door hoeveel gegevens is een n-vlakshoek bepaald? Leid hieruit eenige gevallen van congruentie van twee n-vlakshoeken af.

821. Bewijs, dat twee veelvlakshoeken congruent zijn, als zij drie zijden en de daardoor ingesloten tweevlakshoeken gelijk hebben, mits de gegevens in de beide figuren op dezelfde wijze aan elkander sluiten.

HOOFDSTUK XXXVI.

MEETKUNDIGE PLAATSEN.

197. In de planimetrie hebben wij gezien, dat de aaneenschakeling van punten aanleiding geeft tot het ontstaan eener kromme, die een meetkundige plaats genoemd wordt, als elk harer punten een bepaalde eigenschap bezit. Tevens zagen wij, dat door een aaneenschakeling van rechten, die alle een zelfde eigenschap bezitten, een meetkundige plaats omhuld kan worden.

In de stereometrie kunnen meetkundige plaatsen, zoowel uit punten, als uit rechten en uit vlakken opgebouwd worden.

Wij zullen van de beide eerste soorten hier de belangrijkste behandelen. Kortheidshalve toonen wij hierbij slechts aan, dat alle punten der meetkundige plaats dezelfde eigenschap hebben, doch niet, dat alle punten daarbuiten die eigenschap ook niet bezitten.

Allereerst doen wij opmerken, dat in de vorige hoofdstukken reeds eenige meetkundige plaatsen ter sprake gekomen zijn, b. v. N⁰ 299 en N⁰ 300. Verder geeft N⁰ 307 aanleiding tot

Eigenschap 370. *De meetkundige plaats der rechten, die een gegeven rechte snijden en evenwijdig loopen met een andere gegeven rechte, is een plat vlak, dat evenwijdig aan de laatstgenoemde rechte is.*

Evenzoo geeft N⁰ 310 aanleiding tot

Eigenschap 371. *De meetkundige plaats der rechten, die door één punt gaan en loodrecht staan op een gegeven rechte, is een plat vlak, in dat punt loodrecht op die rechte staande.*

Uit N⁰ 333 volgt:

Eigenschap 372. *De meetkundige plaats der punten, die gelijken afstand tot een vlak hebben, bestaat uit twee vlakken ter weerszijden van het gegeven vlak evenwijdig daaraan gebracht;*

en eindelijk kan N⁰ 335 ook aldus uitgesproken worden:

Eigenschap 373. *De meetkundige plaats der rechten, door een punt evenwijdig met een gegeven vlak getrokken, is een vlak, door dat punt evenwijdig met het eerste gebracht.*

198. Wij gaan nu over tot eenige nieuwe meetkundige plaatsen:

Eigenschap 374. *De meetkundige plaats der punten, die evenver van het eene uiteinde als van het andere uiteinde van een gegeven rechte verwijderd zijn, is een plat vlak, dat de verbindingslijn dier punten loodrecht halveert.*

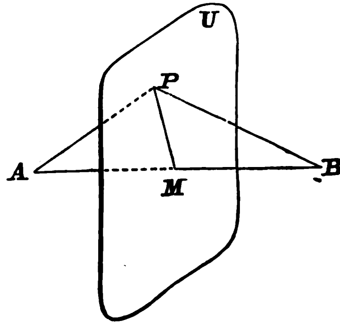


Fig. 382.

Gegeven: $AM = MB$,

Het vlak U staat in $M \perp AB$.

P is een willekeurig punt van U.

Te bewijzen: $PA = PB$.

Bewijs: Trekt men PM, dan is

$$\triangle PAM \cong \triangle PBM,$$

waaruit de stelling onmiddellijk volgt.

Eigenschap 375. *De meetkundige plaats der punten, waarvoor het verschil van de vierkanten der afstanden tot twee gegeven punten een standvastige waarde heeft, is een plat vlak, dat loodrecht staat op de verbindingslijn dier punten.*

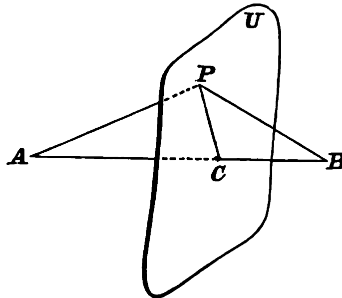


Fig. 383.

Gegeven:

Het vlak U staat in $C \perp AB$.

P ligt in U.

Te bewijzen: $PA^2 - PB^2$ is standvastig voor alle punten van U.

Bewijs: Trekt men PC, dan zijn de driehoeken APC en BPC rechthoekig in C, derhalve

$$AP^2 = AC^2 + CP^2,$$
$$BP^2 = BC^2 + CP^2,$$

dus door aftrekking $AP^2 - BP^2 = AC^2 - BC^2$,

en dit geldt voor alle punten in het vlak U.

199. **Eigenschap 376.** *De meetkundige plaats der punten, die evenver van een van twee willekeurige vlakken, als van het andere verwijderd zijn, is een vlak, dat den hoek tusschen die vlakken halveert.*

Gegeven: Het vlak W halveert den hoek tusschen U en V.

P ligt in W; $PQ \perp U$, $PR \perp V$, Q en R liggen in U en V.

Te bewijzen: $PQ = PR$.

Bewijs: Brengt men een vlak door P Q en P R, dat de snijlijn A B van de drie vlakken in S ontmoet en verbindt men S met P, Q en R, dan is $PQ \perp AB$, omdat A B in het vlak U ligt, en $PR \perp AB$, omdat A B in het vlak V ligt; dus is $AB \perp$ het vlak Q P R S en daarom is $AB \perp QS$ en op S P en S R. $\angle QSR$ is dus de standhoek van de vlakken U en V en $\angle PSR$ die van de vlakken V en W en daar het vlak W den hoek tusschen U en V halveert, is dus volgens N° 336

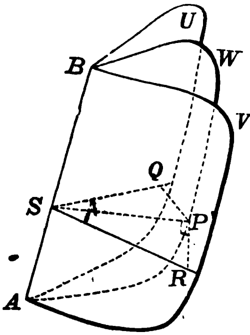


Fig. 384.

$$\angle QSP = \angle RSP.$$

Nu zijn de $\triangle\triangle PQS$ en PRS congruent, daar nog bovendien

$$SP = SP \text{ en } \angle PQS = \angle PRS = 1R$$

is. Derhalve is $PQ = PR$.

Eigenschap 377. *De meetkundige plaats der punten, welker afstanden tot twee gegeven vlakken een standvastige verhouding hebben, is een plat vlak, dat door de doorsnede der gegeven vlakken gaat.*

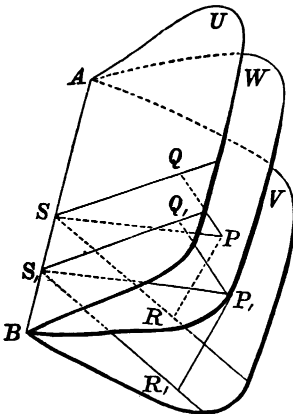


Fig. 385.

Gegeven: De drie vlakken U, V, W hebben de rechte AB gemeen.

P en P_1 liggen in W,
PQ en $P_1Q_1 \perp U$,
PR en $P_1R_1 \perp V$,
Q en Q_1 liggen in U,
R en R_1 in V.

Te bewijzen:

$$PQ : PR = P_1Q_1 : P_1R_1.$$

Bewijs: Zijn S en S_1 de snijpunten van de vlakken Q P R en $Q_1P_1R_1$ met de gemeenschappelijke snijlijn A B, dan is in N° 376 bewezen, dat elk der hoeken Q S P en $Q_1S_1P_1$ den hoek tusschen de vlakken U en W voorstelt, zoodat $\angle QSP = \angle Q_1S_1P_1$ is. Dus is

$$\triangle QSP \sim \triangle Q_1S_1P_1 \; (\angle SQP = \angle S_1Q_1P_1 = 1R),$$

zoodat

$$PQ : P_1Q_1 = PS : P_1S_1$$

is. Evenzoo is ook

$$\triangle RSP \backsim \triangle R_1 S_1 P_1,$$

derhalve

$$PR : P_1 R_1 = PS : P_1 S_1$$

en uit beide evenredigheden volgt nu

$$PQ : P_1 Q_1 = PR : P_1 R_1 \text{ of } PQ : PR = P_1 Q_1 : P_1 R_1.$$

200. **Eigenschap 378.** ***De meetkundige plaats der rechten, die door één punt gaan en gelijke hoeken vormen met twee rechten, bestaat uit twee platte vlakken, die de beide hoeken tusschen die rechten loodrecht halveeren.***

(Men zegt, dat een vlak een hoek loodrecht halveert, als dat vlak door de deellijn van dien hoek gaat en loodrecht op het vlak van den hoek staat).

Bewijs: Onderstellen wij, dat A B en C D de gegeven rechten zijn, terwijl P het gegeven punt is. Wanneer nu P Q een rechte voorstelt, die gelijke hoeken vormt met A B en C D, dan zal P Q volgens § 164 ook gelijke hoeken maken met twee rechten A′ B′ en C′ D′, die door P evenwijdig met A B en C D getrokken worden.

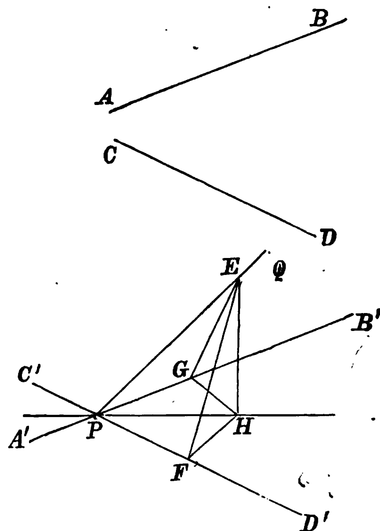


Fig. 386.

Uit een willekeurig punt E van P Q trekke men nu de loodlijnen E F, E G en E H op C′ D′, A′ B′ en het vlak B′ P D′, dan is

$$\triangle PEF \cong \triangle PEG,$$

$$(PE = PE,\ \angle EPF = \angle EPG \text{ en } \angle EFP = \angle EGP = 1\,R);$$

dus is $EF = EG$. Dan is echter

$$\triangle EFH \cong \triangle EGH$$

$$(EF = EG,\ EH = EH \text{ en } \angle EHF = \angle EHG = 1\,R),$$

zoodat $HG = HF$ is en daar deze rechten op P B′ en P D′ loodrecht staan, moet dus H liggen op de rechte in het vlak B′ P D′, die den hoek B′ P D′ halveert. Daar eindelijk $EH \perp$ het vlak B′ P D′ getrokken is, zoo moet het vlak E P H, waarin P E ligt, volgens N⁰ 339 loodrecht op het vlak B′ P D′ staan en die vlakken moeten de standvastige rechte P H gemeen hebben.

Alle rechten, door P getrokken, die gelijke hoeken vormen met A′ B′ en C′ D′, liggen dus in een vlak, dat door de deellijn van een der

hoeken tusschen deze rechten loodrecht op haar vlak aangebracht wordt, en hetzelfde zal dus ook gelden van de rechten, die door P getrokken worden en gelijke hoeken met A B en C D maken.

Aangezien er eindelijk twee deellijnen van de hoeken, die door A′ B′ en C′ D′ gevormd worden, bestaan, zal de gevraagde meetkundige plaats ook bestaan uit de twee vlakken, door die deellijnen loodrecht op het vlak, dat door A′ B′ en C′ D′ gaat, gebracht.

Eigenschap 379. *De meetkundige plaats der punten, die gelijke afstanden hebben tot twee elkander snijdende rechten, bestaat uit twee platte vlakken, die door de deellijnen van de hoeken tusschen die rechten loodrecht op hun vlak aangebracht worden.*

Gegeven: ∟ B A F = ∟ C A F; het vlak A D E ⊥ het vlak B A C, P ligt in het vlak A D E, P Q ⊥ A B, P R ⊥ A C.

Te bewijzen: P Q = P R.

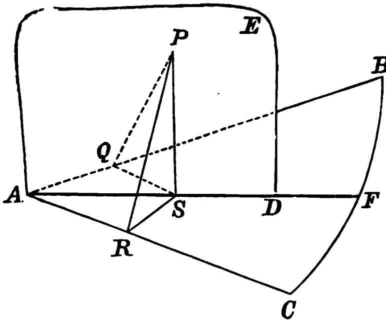


Fig. 387.

Bewijs: Trekt men P S ⊥ het vlak B A C, dan ligt deze rechte volgens N° 341 in het vlak A D E, zoodat het voetpunt S in A D valt. Wanneer men nu S Q en S R trekt, zijn deze rechten ⊥ op A B en A C en omdat S ligt op de deellijn van ∟ B A C, is dus S R = S Q. Nu is

△ P S R ≅ △ P S Q

(P S = P S, S R = S Q, ∟ P S R = ∟ P S Q = 1 R),

derhalve P Q = P R.

Eigenschap 380. *De meetkundige plaats der lijnen, die door één punt gaan en gelijke hoeken vormen met twee platte vlakken, bestaat uit twee platte vlakken, die evenwijdig loopen met de vlakken, welke de tweevlakshoeken tusschen de gegeven vlakken halveeren.*

Bewijs: Zijn U en V de gegeven vlakken en P het gegeven punt, P Q een rechte, die met U en V gelijke hoeken maakt. Brengt men nu de vlakken U′ en V′ door P aan, respectievelijk evenwijdig met U en V, dan zal, zooals men gemakkelijk inziet, P Q ook gelijke hoeken vormen met de vlakken U′ en V′. Construeert men dus de projecties P R en P S van P Q op U′ en V′ door uit een willekeurig punt T van P Q loodlijnen T R en T S op de vlakken U′ en V′ neer te laten, dan is

∟ R P T = ∟ T P S

en dus is volgens de planimetrie

T R = T S.

Alle punten van P Q liggen dus evenver van het vlak U′ als van V′, dus zal volgens N° 376 P Q moeten liggen in het vlak, dat een der hoeken tusschen de vlakken U′ en V′ halveert.

Opmerking: Men kan deze meetkundige plaats tot de vorige terugbrengen door de volgende overweging: Daar de hoek tusschen de rechte P Q en het vlak U volgens N° 318 het complement is van den hoek tusschen P Q en een loodlijn *l* uit P op het vlak U neergelaten; daar, evenzoo de hoek tusschen P Q en V het complement is van dien tusschen P Q en de loodlijn *m* uit P op V neergelaten, zoo zal P Q met de vlakken U en V gelijke hoeken vormen, als P Q gelijke hoeken maakt met de rechten *l* en *m*. De meetkundige plaats der rechten, die, door P gaande, gelijke hoeken met U en V vormen, is dus dezelfde als die der rechten, welke door P gaan en gelijke hoeken met *l* en *m* maken.

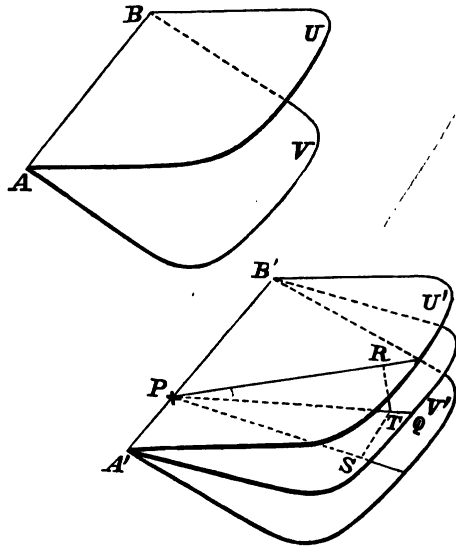


Fig. 388.

Vraagstukken. — Herhaling.

822. De meetkundige plaats van de punten, die gelijke afstanden tot twee evenwijdige vlakken hebben, is een vlak, dat evenwijdig is met elk dier vlakken.

823. De meetkundige plaats van de punten, welker afstanden tot drie niet in één rechte gelegen punten gelijk zijn, is de rechte, die in het middelpunt van den cirkel, om den door die punten gevormden driehoek beschreven, loodrecht op het vlak van die punten wordt opgericht.

824. De drie vlakken, die de zijden van een driehoek loodrecht halveeren, gaan door één ~~punt~~ lijn.

825. De meetkundige plaats van de punten, wier afstanden tot de zijden van een drievlakshoek gelijk zijn, is een rechte door den top van den drievlakshoek gaande, die gelijke hoeken vormt met de drie zijden.

826. De drie vlakken, die de tweevlakshoeken van een drievlakshoek halveeren, gaan door één rechte.

827. Een punt te construeeren, dat in een gegeven vlak ligt en gelijke afstanden tot drie gegeven punten heeft.

828. Een punt te construeeren, dat in een gegeven vlak ligt en gelijke afstanden heeft tot drie vlakken.

829. Als drie vlakken elkander twee aan twee volgens evenwijdige rechten snijden, dan hebben de drie vlakken, die de tweevlakshoeken usschen die vlakken halveeren, een rechte gemeen.

830. Door een gegeven punt een rechte te construeeren, die gelijke hoeken vormt met drie gegeven rechten.

831. Door een gegeven punt een rechte te construeeren, die gelijke hoeken vormt met drie gegeven vlakken.

832. De drie vlakken, die de zijvlakken van een drievlakshoek loodrecht halveeren, gaan door één rechte.

833. De drie vlakken, die door de ribben van een drievlakshoek gaan en de overstaande zijden halveeren, gaan door één rechte.

834. De drie vlakken, die door de ribben van een drievlakshoek loodrecht op de overstaande zijden gebracht worden, gaan door één rechte.

N.B. Voor het bewijs brenge men door twee der ribben vlakken aan, die loodrecht op de overstaande zijvlakken staan, en construeere een hulpvlak loodrecht staande op de snijlijn dezer vlakken. In den driehoek, volgens welken dit hulpvlak de zijvlakken van den drievlakshoek snijdt, zijn dan door de snijding van het hulpvlak met de twee eerstgenoemde vlakken twee hoogtelijnen ontstaan, enz.

835. Een rechte te construeeren, die loodrecht is op een gegeven vlak en twee gegeven elkander kruisende rechten snijdt.

836. Twee overstaande hoekpunten van een parallelogram hebben gelijke afstanden tot een vlak, dat een der diagonalen bevat.

837. De middens der zijden van een scheeven vierhoek zijn de hoekpunten van een parallelogram.

(Een veelhoek heet scheef, als de hoekpunten niet in hetzelfde vlak liggen).

838. De drie rechten, die de middens van de overstaande zijden en van de diagonalen van een scheeven vierhoek verbinden, gaan door één punt.

839. In een scheeven vierhoek is de som van de quadraten der zijden gelijk aan de som van de quadraten der diagonalen, vermeer-

derd met viermaal het quadraat van de rechte, die de middens der diagonalen vereenigen.

840. Als de diagonalen van een scheeven vierhoek elkander loodrecht kruisen, dan zijn de sommen van de vierkanten van de twee paren overstaande zijden gelijk.

841. Als de overstaande zijden van een scheeven vierhoek elkander twee aan twee loodrecht kruisen, dan zal hetzelfde van de diagonalen gelden.

842. Het vlak, dat bij een gelijkbeenigen drievlakshoek den nevenhoek van den over de basis liggenden hoek halveert, snijdt de basis volgens een rechte, die gelijke hoeken vormt met de in de basis gelegen ribben van den drievlakshoek.

843. Gegeven twee vlakken U en V en het vlak W, dat den hoek tusschen U en V middendoor deelt. Als een willekeurig vlak de drie vlakken volgens AB, AC en AD snijdt, dan zal $\angle BAD$ in het algemeen niet gelijk zijn aan $\angle DAC$. Wanneer bestaat die gelijkheid wel?

HOOFDSTUK XXXVII.

HET PRISMA.

201. In N⁰ 325 is bewezen, dat, als twee vlakken evenwijdig loopen met een zelfde rechte, hunne doorsnede ook daaraan evenwijdig loopt. Denkt men zich nu een reeks van *n*-vlakken 1, 2, 3, ... *n*, die alle evenwijdig aan een zelfde rechte loopen en bepaalt men de snijlijn van elke twee opeenvolgende vlakken, terwijl men elk vlak niet buiten de daarin gelegen snijlijnen verlengt, dan ontstaan evenwijdige snijlijnen en er wordt een deel der ruimte afgesneden, dat zich naar twee zijden tot in het oneindige uitstrekt.

Indien men nu nog twee evenwijdige vlakken aanbrengt, die de *n*-snijlijnen der vlakken snijden, ontstaat een volkomen begrensd deel der ruimte, dat men **p r i s m a** noemt (fig. 389). De zijvlakken van het lichaam, die gevormd worden door de *n* vlakken, die alle evenwijdig aan één rechte zijn, heeten **o p s t a a n d e z ij v l a k k e n**, terwijl de twee andere begrenzende vlakken **g r o n d-** en **b o v e n v l a k** genoemd worden. In fig. 389 kan men dus A′ B′ C′ D′ E′ het grondvlak, A B C D E het bovenvlak noemen en D E E′ D′ is een opstaand zijvlak.

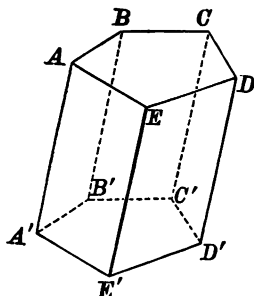


Fig. 389.

De snijlijnen der begrenzende vlakken heeten **r i b b e n v a n h e t l i c h a a m**, die der opstaande zijvlakken heeten **o p s t a a n d e r i b b e n**.

De som der opstaande zijvlakken wordt het **z ij d e l i n g s c h o p p e r v l a k** genoemd. De afstand tusschen het grondvlak en het bovenvlak heet de **h o o g t e v a n h e t p r i s m a**.

Eigenschap 381. *De opstaande zijvlakken van een prisma zijn parallelograms.*

Bewijs: Daar het grond- en bovenvlak evenwijdig loopen, worden zij door elk opstaand zijvlak, b.v. D E E′ D′, volgens N⁰ 330 volgens

evenwijdige rechten gesneden. Dus is $DE \parallel D'E'$ en daar ook volgens het voorgaande $DD' \parallel EE'$ is $DEE'D'$ een parallelogram.

Eigenschap 382. *Grond- en bovenvlak van een prisma zijn congruente veelhoeken.*

Bewijs: Uit het vorige bewijs volgt, dat $DE \parallel$ en $= D'E'$ is. Dus zijn de zijden van het grondvlak en het bovenvlak twee aan twee gelijk en evenwijdig en wegens deze laatste eigenschap zijn dus ook de hoeken twee aan twee gelijk.

202. **Eigenschap 383.** *Twee evenwijdige doorsneden van een prisma, waarbij alle opstaande ribben gesneden worden, zijn congruent.*

Snijdt men namelijk een prisma door twee evenwijdige vlakken U en V, dan geldt voor de doorsneden hetzelfde als voor het grond- en het bovenvlak, omdat deze laatste ook willekeurige evenwijdige doorsneden zijn.

Onder de doorsneden van een prisma neemt de loodrechte doorsnede, d. i. de doorsnede met een plat vlak, loodrecht op een der opstaande ribben staande, een belangrijke plaats in.

De zijden eener loodrechte doorsnede staan alle loodrecht op elk der opstaande ribben.

Eigenschap 384. *Het zijdelingsch oppervlak van een prisma is gelijk aan het product van den omtrek der loodrechte doorsnede met een der opstaande ribben.*

Gegeven:

Het vlak $PQRSU \perp AA'$.

Te bewijzen:

Het zijdelingsch oppervlak $= AA' \times$ den omtrek van den veelhoek $PQRSU$.

Bewijs: Het zijdelingsch oppervlak bestaat uit de som der parallelograms $AA'B'B$, $BB'C'C$ enz.

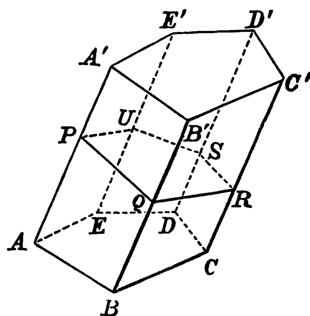


Fig. 390.

Nu is, als men de lengte van elke der opstaande ribben door l voorstelt,

$$\begin{aligned}
\text{Opp. par. } AA'B'B &= AA' \times PQ = l \times PQ,\\
\text{,, \quad ,, \quad } BB'C'C &= BB' \times QR = l \times QR,\\
\text{,, \quad ,, \quad } CC'D'D &= CC' \times RS = l \times RS,\\
\text{,, \quad ,, \quad } DD'E'E &= DD' \times SU = l \times SU,\\
\text{,, \quad ,, \quad } EE'A'A &= EE' \times UP = l \times UP,
\end{aligned}$$

dus door optelling

$$\text{het zijdelingsch oppervlak} = l\,(PQ + QR + RS + SU + UP).$$

Wanneer men in een prisma een snijvlak aanbrengt, dat alle opstaande ribben snijdt en niet evenwijdig loopt met het grondvlak, dan wordt het lichaam in twee **afgeknotte prisma's** verdeeld.

203. Naar het aantal zijden van het grondvlak worden de prisma's onderscheiden in **drie-, vier-, vijf-,** enz. **-zijdige.** Men spreekt echter ook van een **driehoekig prisma.** Fig. 389 en fig. 390 stellen dus vijfzijdige prisma's voor.

Vereenigt men twee hoekpunten van het lichaam, die nog niet door een ribbe verbonden zijn, dan ontstaan diagonalen, die in twee soorten verdeeld worden:

1°. die, welke in de zijvlakken gelegen zijn;

2°. die, welke niet in een zijvlak liggen. Deze laatste worden **lichaams- of hoofddiagonalen** genoemd.

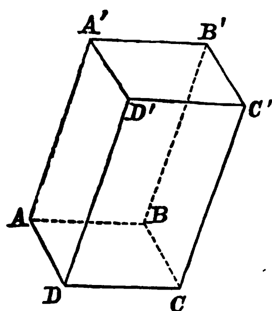


Fig. 391.

Een prisma heet **recht** als de opstaande ribben loodrecht op het grond- of het bovenvlak staan.

Een prisma heet **regelmatig,** als het recht is en bovendien het grondvlak een willekeurige regelmatige veelhoek is.

204. De belangrijkste figuur onder de prisma's is een prisma, dat een parallelogram tot grondvlak heeft. Het heet **parallelopipedum** en wordt door zes parallelograms, die twee aan twee congruent zijn, begrensd (fig. 391).

Men ziet gemakkelijk in, dat een parallelopipedum vier lichaamsdiagonalen bezit, die in fig. 392 de hoekpunten A en C', B en D', C en A', D en B' verbinden.

Eigenschap 385. *De hoofddiagonalen van een parallelopipedum gaan door één punt en deelen elkander middendoor.*

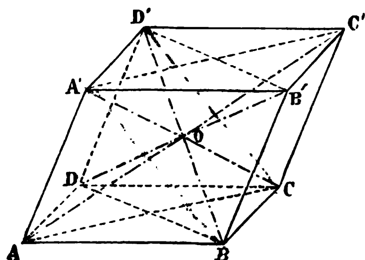


Fig. 392.

Bewijs: Letten wij voorloopig alleen op de diagonalen A' C en A C'. Daar A A' en C C' evenwijdig zijn, zullen die diagonalen in één vlak liggen. Daar bovendien A A' = C C' is, zal door vereeniging van A met C en van A' met C' een parallelogram ontstaan, waarvan A C' en A' C diagonalen zijn. Dus deelt A' C de rechte A C' middendoor.

Beschouwt men nu A' C en

B D′, dan zullen deze opnieuw in één vlak liggen, omdat B C || A′ D′ is, zoodat wegens de gelijkheid van B C en A′ D′ ook B C D′ A′ een parallelogram wordt. Dus deelt D′ B evenzeer A′ C middendoor.

Aldus besluit men, dat A′ C door elke andere diagonaal middendoor gedeeld wordt. Alle diagonalen gaan nu door het midden van A′ C, d. i. zij gaan door één punt.

205. Indien een der opstaande ribben van een parallelopipedum loodrecht op het grondvlak staat, heet dat parallelopipedum r e c h t en als *bovendien* het grondvlak een rechthoek is, dan heet de figuur r e c h t h o e k i g.

Een rechthoekig parallelopipedum wordt dus door zes rechthoeken begrensd.

Eigenschap 386. *De diagonalen van een rechthoekig parallelopipedum zijn gelijk.*

Beschouwt men de diagonalen B D′ en B′ D. Deze zijn tevens diagonalen van het parallelogram, dat ontstaat door D B en D′ B′ te trekken. Maar omdat

$$B B' \perp \text{het vlak } A B C D$$

is, zal

$$B B' \perp B D$$

zijn, dus is het parallelogram B D D′ B′ een rechthoek, zoodat

$$B D' = B' D$$

is.

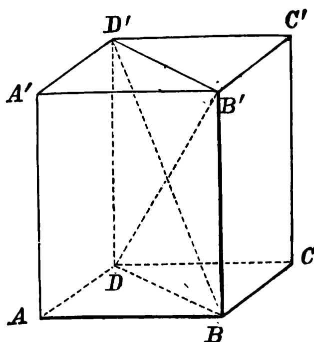


Fig. 393.

Eigenschap 387. *Het vierkant van een hoofddiagonaal van een rechthoekig parallelopipedum is gelijk aan de som van de vierkanten van drie in één hoekpunt samenkomende ribben.*

In fig. 393 is in den rechthoekigen driehoek B B′ D

$$B'D^2 = B'B^2 + BD^2,$$

en in Δ B C D, die rechthoekig in C is, heeft men

$$BD^2 = BC^2 + CD^2,$$

derhalve door substitutie in de vorige vergelijking

$$B'D^2 = B'B^2 + BC^2 + CD^2,$$

of, daar C D = A B is,

$$B'D^2 = B'B^2 + CB^2 + AB^2.$$

De drie in één hoekpunt uitkomende ribben van een rechthoekig parallelopipedum worden gewoonlijk met de benamingen l e n g t e

breedte en hoogte aangeduid, waarbij het willekeurig is, welken naam men aan een bepaalde ribbe toekent.

Zijn de drie in één hoekpunt samenkomende ribben van een rechthoekig parallelopipedum gelijk, dan wordt het **kubus** genoemd.

Volgens N⁰ 387 bedraagt de lengte van een lichaamsdiagonaal van den kubus $a\sqrt{3}$, als a de lengte van elke ribbe voorstelt.

Vraagstukken.

844. Bewijs, dat de som der hoeken op de opstaande ribben van een n-zijdig prisma gelijk is aan $n-2$ gestrekte hoeken.

845. Hoeveel lichaamsdiagonalen kunnen in een zeszijdig prisma getrokken worden? Hoeveel in een n-zijdig?

846. Bewijs, dat een parallelopipedum rechthoekig is, als ~~de drie~~ alle diagonalen gelijk zijn.

847. In elk parallelopipedum is de som van de quadraten der hoofddiagonalen gelijk aan de som der quadraten van alle ribben.

848. Bepaal het oppervlak van een recht driezijdig prisma, waarvan de opstaande ribben 3 d.M. lang zijn, terwijl het grondvlak zijden heeft van 7, 12 en 13 c.M.

849. Bereken het oppervlak van een regelmatig twaalfzijdig prisma, waarvan de zijde van het grondvlak 6 c.M. is, terwijl de opstaande ribben 2 d.M. lang zijn.

850. Het zijdelingsch oppervlak van een afgeknot regelmatig prisma is gelijk aan het product van een zijde van het grondvlak met de som der opstaande ribben.

851. De rechte, die de zwaartepunten van het grond- en het bovenvlak van een afgeknot driezijdig prisma verbindt, loopt evenwijdig aan de opstaande ribben.

852. Druk de lengte van de verbindingslijn der zwaartepunten van het grond- en het bovenvlak van een afgeknot driezijdig prisma uit in de lengten der opstaande ribben.

HOOFDSTUK XXXVIII.

DE PYRAMIDE. HET VIERVLAK.

206. Een drievlakshoek en een veelvlakshoek begrenzen een deel der ruimte niet volkomen. Brengt men echter een vlak aan, dat alle ribben der figuur snijdt, dan noemt men het daardoor en door de zijden van den drie- of veelvlakshoek begrensde deel der ruimte een pyramide.

Deze ontstaat dus evenzeer, indien men een punt aanneemt buiten het vlak van een willekeurigen veelhoek en vervolgens door dat punt en elke zijde van den veelhoek een vlak legt.

Den top van den drie- of veelvlakshoek — of het punt buiten het vlak van den veelhoek aangenomen — noemt men ook den top der pyramide. De daarin uitkomende vlakken heeten de opstaande zijvlakken, terwijl het snijvlak van den drie- of veelvlakshoek — of de willekeurig aangenomen veelhoek — het grondvlak der pyramide genoemd wordt.

De som der opstaande zijvlakken heet weder het zijdelingsch oppervlak.

Bij het noemen eener pyramide plaatst men bij voorkeur de bij den top geplaatste letter het eerst.

207. **Eigenschap 388.** *Evenwijdige doorsneden van een pyramide zijn gelijkvormige veelhoeken.*

Bewijs: Zij namelijk in fig. 394 T A B C D een pyramide, die door twee evenwijdige vlakken gesneden wordt, zoodat P Q R S en $p\,q\,r\,s$ de doorsneden zijn, dan moet bewezen worden, dat deze veelhoeken gelijkvormig zijn.

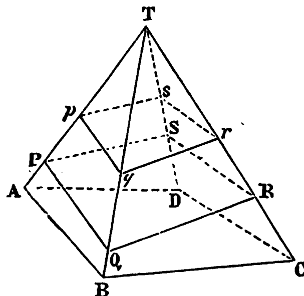


Fig. 394.

Nu zijn de doorsneden dier evenwijdige vlakken met één zijvlak evenwijdig volgens N° 330, zoodat b. v. $q\,r \parallel Q\,R$ en $p\,q \parallel P\,Q$ is. Dus volgt uit $\triangle$ T Q R

$$q\,r : Q\,R = T\,q : T\,Q,$$

en uit $\triangle$ T P Q

$$p\,q : P\,Q = T\,q : T\,Q,$$

derhalve

$$qr : QR = pq : PQ,$$

waaruit blijkt, dat de zijden der evenwijdige doorsneden twee aan twee evenredig zijn en wegens de evenwijdigheid dier zijden zijn bovendien de hoeken van die veelhoeken twee aan twee gelijk. Dus zijn die veelhoeken gelijkvormig.

Eigenschap 389. *De oppervlakken van evenwijdige doorsneden eener pyramide verhouden zich als de vierkanten van hare afstanden tot den top der pyramide.*

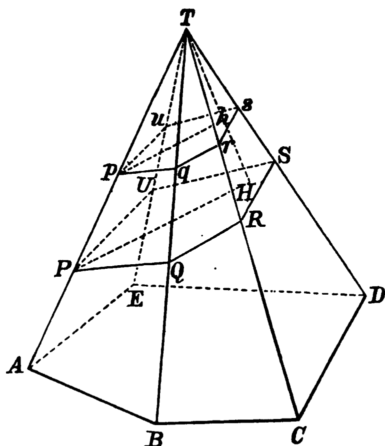


Fig. 395.

Gegeven:

Het vlak PQRSU || het vlak $pqrsu$.

Uit T is een loodlijn op de beide vlakken neergelaten, die deze respectievelijk in H en h snijdt.

Te bewijzen:

Opp. PQRSU : Opp. $pqrsu$ = $TH^2 : Th^2$.

Bewijs: Volgens de vorige eigenschap is veelh. PQRSU ∽ veelh. $pqrsu$, dus verhouden hunne oppervlakken zich als de vierkanten van gelijkstandige zijden (N° 201) of

$$\text{Opp. } PQRSU : \text{Opp. } pqrsu = PQ^2 : pq^2 \quad . \quad . \quad (1).$$

Maar omdat $pq \parallel PQ$ is, bestaat de evenredigheid

$$PQ : pq = TP : Tp.$$

Brengt men nu een vlak door TA en TH, dan snijdt dit de vlakken PQRSU en $pqrsu$ volgens de evenwijdigen PH en ph. Dus heeft men in △ TPH

$$TP : Tp = TH : Th,$$

en derhalve ook

$$PQ : pq = TH : Th.$$

In verband met (1) vindt men dus

$$\text{Opp. } PQRSU : \text{Opp. } pqrsu = TH^2 : Th^2.$$

208. De loodlijn, uit den top van een pyramide op het grondvlak neergelaten, heet de hoogtelijn of de **hoogte** der pyramide.

Een pyramide heet **regelmatig**, als het grondvlak een regelmatige veelhoek is en de hoogtelijn haar voetpunt heeft in het middelpunt van dien veelhoek.

Eigenschap 390. *De zijvlakken van een regelmatige pyramide zijn congruente gelijkbeenige driehoeken.*

Bewijs: Is namelijk de pyramide T A B C D E regelmatig, en O het middelpunt van het grondvlak, dus T O de hoogte, dan is

$$\triangle TOB \cong \triangle TOC$$

$(TO = TO, OB = OC, \angle TOB = \angle TOC = 1R)$;

derhalve $TB = TC$.

Evenzoo is $TC = TD$, enz. dus zijn de driehoeken T B C en T C D gelijkbeenig en congruent, omdat zij de drie zijden gelijk hebben.

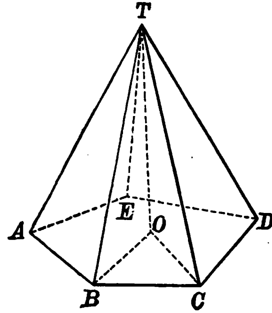


Fig. 396.

Daar de opstaande zijvlakken van een regelmatige pyramide congruente driehoeken zijn, zijn de hoogtelijnen dier driehoeken, uit den top der pyramide neergelaten, alle gelijk.

De loodlijn in een zijvlak van een regelmatige pyramide uit den top op een ribbe van het grondvlak neergelaten, noemt men het **apothema** der regelmatige pyramide.

Eigenschap 391. *Het zijdelingsch oppervlak van een regelmatige pyramide is gelijk aan het halve product van het apothema met den omtrek van het grondvlak.*

Bewijs: Trekt men uit T loodlijnen Ta, Tb... op de zijden A B, B C... van het grondvlak, dan zijn deze loodlijnen alle gelijk aan het apothema s. Dus is

$$\text{Opp. } \triangle TAB = \tfrac{1}{2} AB \times Ta = \tfrac{1}{2} s \times AB,$$

$$\text{Opp. } \triangle TBC = \tfrac{1}{2} BC \times Tb = \tfrac{1}{2} s \times BC, \text{ enz.}$$

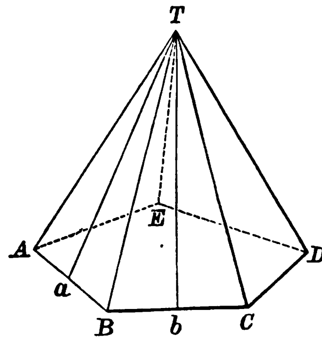


Fig. 397.

dus door optelling:

het zijdelingsch oppervlak der regelmatige pyramide =

$$\tfrac{1}{2} s (AB + BC + CD + DE + EA) = \tfrac{1}{2} s \times \text{omtrek grondvlak.}$$

209. Snijdt men een willekeurige pyramide door een vlak, *dat evenwijdig met het grondvlak loopt*, dan wordt het lichaam verdeeld in een kleinere pyramide en een afgeknotte pyramide.

De opstaande zijvlakken van een afgeknotte pyramide zijn trapezia en de beide andere begrenzende vlakken, die grond- en bovenvlak genoemd worden, zijn volgens N° 388 gelijkvormige evenwijdig geplaatste veelhoeken.

Gewoonlijk duidt men het grootste dezer twee vlakken met den naam grondvlak aan. In fig. 398 is dus de veelhoek A B C D E het grondvlak der figuur.

De afstand van het grond- en bovenvlak heet de hoogte der afgeknotte pyramide.

Op dezelfde wijze, waarop uit een willekeurige pyramide een afgeknotte verkregen is, ontstaat uit een regelmatige pyramide een regelmatige afgeknotte pyramide en men bewijst gemakkelijk

Eigenschap 392. *De opstaande zijvlakken van een regelmatige afgeknotte pyramide zijn congruente gelijkbeenige trapezia.*

De hoogtelijn van elk der trapezia wordt het apothema der regelmatige afgeknotte pyramide genoemd.

Als laatste eigenschap bewijzen wij

Eigenschap 393. *Het zijdelingsch oppervlak van een regelmatige afgeknotte pyramide is gelijk aan het halve product van het apothema met de som der omtrekken van grond- en bovenvlak.*

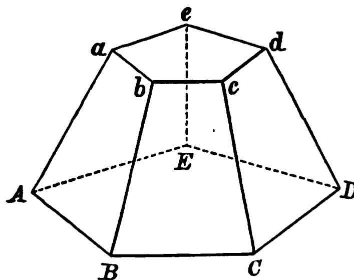


Fig. 398.

Bewijs: In fig. 398 is namelijk, als men het apothema door s voorstelt,

opp. trapezium $A B b a = \frac{1}{2} s (A B + a b)$,

opp. trapezium $B C c b = \frac{1}{2} s (B C + b c)$, enz.

en door optelling vindt men onmiddellijk de stelling.

210. De pyramiden en afgeknotte pyramiden worden naar het aantal zijden van het grondvlak in drie-, vier-, vijfzijdige enz. verdeeld. Fig. 394 stelt dus een vierzijdige pyramide, fig. 398 een regelmatige afgeknotte vijfzijdige pyramide voor.

De eenvoudigste pyramide is de driezijdige, ook wel viervlak genoemd. Zij wordt door vier willekeurige driehoeken begrensd, waarvan elk als grondvlak beschouwd kan worden, terwijl dan het overliggende hoekpunt de top heet. De standhoeken op elk der ribben worden ook wel kortweg de hoeken van het viervlak genoemd.

Eigenschap 394. *De som der hoeken van een viervlak bedraagt meer dan twee gestrekte hoeken.*

Bewijs: Beschouwt men elk der drievlakshoeken, welker toppen in de hoekpunten A, B, C, D gelegen zijn, en duidt men kortheidshalve den standhoek op een ribbe, b.v. op A C, door $\llcorner$ A C aan, dan is in drievlakshoek A B C D:

$\llcorner AB + \llcorner AC + \llcorner AD > 180^\circ$,

in drievlakshoek B C D A:

$\llcorner BC + \llcorner BD + \llcorner BA > 180^\circ$,

in drievlakshoek C D A B:

$\llcorner CD + \llcorner CA + \llcorner CB > 180^\circ$,

in drievlakshoek D A B C:

$\llcorner DA + \llcorner DB + \llcorner DC > 180^\circ$.

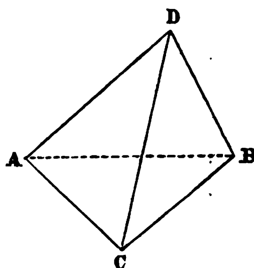


Fig. 399.

Telt men deze vergelijkingen op en neemt men daarbij in acht, dat $\llcorner$ A B en $\llcorner$ B A beide den standhoek op de ribbe A B voorstellen, dan ontstaat

$$2 \times \text{de som der standhoeken op alle ribben} > 4 \times 180^\circ,$$

en dus is

$$\text{de som der hoeken van het viervlak} > 2 \times 180^\circ.$$

211. Een rechte, die een hoekpunt van een viervlak met het zwaartepunt van het overstaande zijvlak verbindt, heet een **zwaartelijn** van het viervlak.

Eigenschap 395. *De vier zwaartelijnen van een viervlak gaan door één punt en verdeelen elkander in stukken, die zich verhouden als* 1 : 3.

Bewijs: Om de zwaartelijn uit A te construeeren, deelen wij C D en B D middendoor in M en N, verbinden B met M en C met N, welke rechten elkander in Z_1 snijden, dan is AZ_1 de verlangde zwaartelijn. Het zwaartepunt van $\triangle ACD$ moet op de rechte A M liggen en wel in Z_2, indien $AZ_2 = 2 Z_2M$; dan is BZ_2 een tweede zwaartelijn van het viervlak en daar deze met AZ_1 in één vlak A B M ligt, zoo moeten AZ_1 en BZ_2 elkander snijden, b. v. in Z. Daar nu

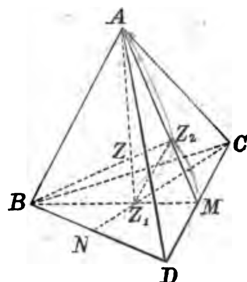


Fig. 400.

$$MZ_2 : AZ_2 = 1 : 2$$

en

$$MZ_1 : BZ_1 = 1 : 2,$$

zoo is

$$MZ_2 : AZ_2 = MZ_1 : BZ_1;$$

derhalve is $Z_1 Z_2 \parallel BA$ en hieruit volgt dan

$$ZZ_1 : AZ = Z_1 Z_2 : AB.$$

Maar

$$Z_1 Z_2 : AB = Z_2 M : AM = 1 : 3,$$

derhalve

$$ZZ_1 : AZ = 1 : 3.$$

Hiermede is dus bewezen, dat de zwaartelijn BZ_2 de andere, AZ_1, snijdt in Z en wel zoodanig, dat

$$ZZ_1 : AZ = 1 : 3.$$

Maar hetzelfde zal van elke zwaartelijn ten opzichte van AZ_1 gelden, dus gaan alle zwaartelijnen door het punt Z.

212. Staat in een viervlak een opstaande ribbe loodrecht op het grondvlak, dan heet het een **recht viervlak**. Twee der opstaande zijvlakken staan dan loodrecht op het grondvlak.

Is bovendien het grondvlak rechthoekig, zoodat drie in één hoekpunt samenkomende ribben loodrecht op elkander staan, dan heet het viervlak **rechthoekig**.

Deze figuren hebben eenige eigenschappen, die veel overeenkomst vertoonen met die van den rechthoekigen driehoek.

Eigenschap 396. ***In een recht viervlak is het grondvlak middenevenredig tusschen het scheefhoekige opstaande zijvlak en zijn projectie daarop.***

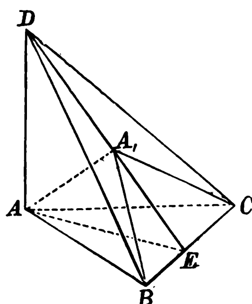


Fig. 401.

Gegeven:

$$\llcorner DAB = \llcorner DAC = 1R.$$

A_1 is het voetpunt der loodlijn, uit A op het vlak DBC neergelaten.

Te bewijzen:

$$\triangle A_1BC : \triangle ABC = \triangle ABC : \triangle DBC.$$

Bewijs: Ten einde de hoogtelijnen van elk der driehoeken A_1BC, ABC en DBC te construeeren, is alleen noodig D met A_1 te verbinden, DA_1 te verlengen, totdat zij BC in E snijdt en E met het punt A te vereenigen. Want, omdat $DA \perp$ op AC en op AB is, is DA ook $\perp BC$, maar AA_1 is $\perp$ op het vlak DBC, dus ook op BC, zoodat BC loodrecht op het vlak DAA_1 zijn moet en hieruit volgt dan: $DE \perp BC$ en $AE \perp BC$. Nu is

$$\triangle A_1BC = \tfrac{1}{2} BC \times A_1E,\ \triangle ABC = \tfrac{1}{2} BC \times AE,\ \triangle DBC = \tfrac{1}{2} BC \times DE,$$

dus behoeft men slechts te bewijzen

$$A_1E : AE = AE : DE.$$

De juistheid van deze evenredigheid blijkt onmiddellijk uit het feit, dat $\triangle$ DAE rechthoekig is in A en dat AA_1 loodrecht op de hypothenusa DE staat.

Eigenschap 397. *In een rechthoekig viervlak is de som van de vierkanten der drie rechte zijvlakken gelijk aan het vierkant van het schuine zijvlak.*

Gegeven in fig. 401:

$$\llcorner DAB = \llcorner DAC = \llcorner BAC = 1R.$$

A_1 is het voetpunt der loodlijn, uit A op het vlak DBC neergelaten.

Te bewijzen:

$$(\triangle DBC)^2 = (\triangle ABC)^2 + (\triangle DAB)^2 + (\triangle DAC)^2.$$

Bewijs: Volgens de vorige eigenschap is:

$$(\triangle ABC)^2 = \triangle A_1BC \times \triangle DBC.$$

Evenzoo is

$$(\triangle DAB)^2 = \triangle A_1DB \times \triangle DBC,$$
$$(\triangle DAC)^2 = \triangle A_1CD \times \triangle DBC,$$

en door optelling dezer vergelijkingen wordt het gestelde verkregen.

Opmerking: De vorige eigenschap is slechts een bijzonder geval van een andere, die aldus luidt:

Projecteert men een willekeurigen driehoek op drie onderling loodrechte vlakken, dan is het vierkant van het oppervlak van den driehoek gelijk aan de som der vierkanten van de oppervlakken der projecties. Voor het bewijs vergelijke men de laatste vraagstukken van dit werk.

213. Een viervlak is volkomen bepaald, als het grondvlak en de ligging van den top ten opzichte van het grondvlak gegeven zijn. Het eerste vereischt drie gegevens en voor het laatste zijn evenzeer drie gegevens noodig, — b. v. de drie standhoeken, die de opstaande zijvlakken met het grondvlak vormen — dus is een viervlak door $3 + 3 = 6$ onafhankelijke gegevens volkomen bepaald.

De ribben en de hoeken van een viervlak worden de e l e m e n t e n v a n h e t v i e r v l a k genoemd. Hiertoe rekent men ook de hoeken, door elk paar ribben in een zijvlak gevormd.

Twee viervlakken, die alle elementen gelijk hebben, noemt men weder g e l ij k e n g e l ij k v o r m i g.

Van groot belang is het bij de constructie van een viervlak uit zes gegevens te letten op de volgorde, waarin die gegevens voorkomen, zoo-

dat geenszins altijd twee viervlakken, die zes onafhankelijke gegevens gelijk hebben, elkanders ruimte kunnen innemen.

In het vervolg zullen wij echter aannemen, dat die overeenstemming in volgorde der gegevens bij twee viervlakken plaats heeft. Dan is het in het algemeen mogelijk, zooals wij met enkele voorbeelden zullen aantoonen, indien nog de gelijkheid van zes elementen gegeven is, het eene viervlak zoo te plaatsen, dat het volkomen met het andere tot samenvalling komt. De viervlakken heeten dan congruent en deze betrekking wordt weder door het teeken $\cong$ aangeduid.

Men bewijst nu gemakkelijk door de figuren tot samenvalling te brengen:

Eigenschap 398. *Twee viervlakken zijn congruent, als twee zijvlakken van het eene congruent zijn met twee zijvlakken van het andere en de figuren bovendien de ingesloten standhoeken gelijk hebben.*

Eigenschap 399. *Twee viervlakken zijn congruent, als een zijvlak van het eene congruent is met een zijvlak van het andere en de figuren bovendien de drie aanliggende standhoeken gelijk hebben.*

Men overtuige zich, dat in elk dezer gevallen inderdaad de gelijkheid van zes elementen gegeven is.

Eindelijk bewijzen wij:

Eigenschap 400. *Twee viervlakken zijn congruent, als de zes ribben van het eene viervlak gelijk zijn aan die van het andere.*

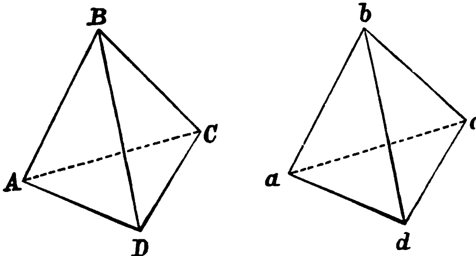


Fig. 402.

Gegeven:

$AB = ab$, $BC = bc$,
$AC = ac$, $AD = ad$,
$BD = bd$, $CD = cd$.

Te bewijzen:

Het viervlak $ABCD \cong$ het viervlak $abcd$.

Bewijs: Uit de gelijkheid der ribben van de viervlakken volgt de congruentie der zijvlakken en hieruit volgt dan weder de gelijkheid der in die zijvlakken gelegen hoeken. Dus is b. v. $\triangle ABC \cong \triangle abc$, waaruit volgt

$$\angle BAC = \angle bac,$$

en evenzoo besluit men

$$\angle BAD = \angle bad, \text{ en } \angle CAD = \angle cad.$$

Dus is de drievlakshoek $ABCD \cong$ den drievlakshoek $abcd$ (N^0 361), waaruit dan volgt, dat

de standhoek op AC = dien op ac.

Nu hebben de beide viervlakken de twee paren zijvlakken, namelijk △ ABC en △ *abc*, △ ACD en △ *acd* congruent en bovendien is de ingesloten standhoek in de figuren dezelfde. Dus zijn de figuren volgens N° 398 congruent.

214. Men noemt twee viervlakken gelijkvormig, als alle ribben van het eene viervlak evenredig zijn met die van het andere, terwijl bovendien weder de gelijkstandige ribben in de beide figuren op dezelfde wijze aan elkander sluiten.

Eigenschap 401. *In gelijkvormige viervlakken zijn de hoeken op twee gelijkstandige ribben gelijk.*

Gegeven:

$$AB : ab = BC : bc = BD : bd = AC : ac = AD : ad = CD : cd.$$

Te bewijzen: De standhoek op AC = dien op *ac*.

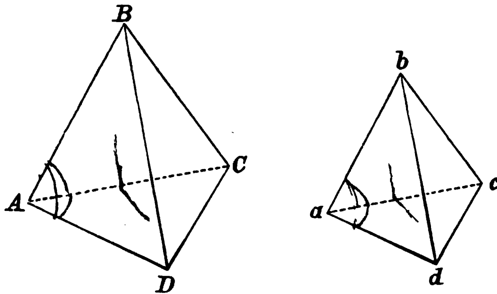


Fig. 403.

Bewijs: Uit het gegevene volgt onmiddellijk:

$$\triangle ABC \backsim \triangle abc,$$
$$\triangle ACD \backsim \triangle acd,$$
$$\triangle ABD \backsim \triangle abd,$$

dus is

$$\angle BAC = \angle bac, \quad \angle CAD = cad, \quad \angle BAD = \angle bad,$$

zoodat volgens N° 361

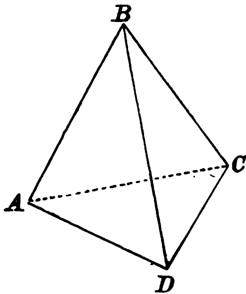
de drievlakshoek ABCD ≅ den drievlakshoek *abcd*

is, waaruit de eigenschap volgt.

De verschillende gevallen van gelijkvormigheid van twee viervlakken worden zelden toegepast. Het merkwaardigste is het volgende:

Eigenschap 402. *Twee viervlakken zijn gelijkvormig, als vijf hoeken van het eene gelijk zijn aan vijf hoeken van het andere, mits de volgorde der gelijke elementen in twee figuren overeenstemt.*

Deze eigenschap voert namelijk, omdat twee gelijkvormige viervlakken alle hoeken gelijk hebben, tot het besluit, dat door vijf hoeken van een viervlak de zesde hoek bepaald zijn moet, zoodat tusschen deze zes grootheden, alhoewel hare som onbepaald is (N° 396), toch een betrekking bestaan moet.



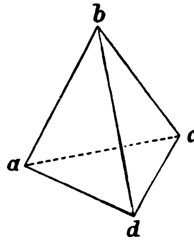


Fig. 403.

Gegeven:

De standhoeken op A B, A C, A D, B C en B D zijn respectievelijk gelijk aan die op

ab, *ac*, *ad*, *bc* en *bd*.

Te bewijzen:

A B : *ab* = A C : *ac* = A D : *ad* = B C : *bc* = B D : *bd* = C D : *cd*.

Bewijs: De drievlakshoeken A B C D en *abcd* zijn volgens N° 362 congruent, omdat zij de drie hoeken gelijk hebben en dus zijn de gelijkstandige zijden dier drievlakshoeken ook gelijk, zoodat

$$\angle BAC = \angle bac$$

is. Evenzoo volgt uit de drievlakshoeken B C D A en *bcda*

$$\angle ABC = \angle abc.$$

Nu zijn dus twee hoeken van △ A B C gelijk aan twee hoeken van △ *abc*, waaruit dan volgt

$$\angle ACB = \angle acb,$$

zoodat de drievlakshoeken C D B A en *cdba* congruent zijn volgens N° 360 (∠ A C B = ∠ *acb*, de standhoeken op B C en A C = die op *bc* en *ac*). Dus zijn de overige elementen dier drievlakshoeken gelijk, d. i. dus

$$\angle ACD = \angle acd, \quad \angle BCD = \angle bcd$$

en de standhoek op C D = dien op *cd*.

Men ziet nu onmiddellijk in, dat de zijvlakken der twee viervlakken twee aan twee gelijkvormig zijn, omdat zij telkens twee paren hoeken gelijk hebben en hieruit volgt dan de evenredigheid van alle ribben.

Van de overige gevallen van gelijkvormigheid vermelden wij

Eigenschap 403. ***Twee viervlakken zijn gelijkvormig, als twee zijvlakken van het eene gelijkvormig zijn met die van het andere en de viervlakken verder den ingesloten hoek gelijk hebben.***

Eigenschap 404. ***Twee viervlakken zijn gelijkvormig, als één zijvlak van het eene gelijkvormig is met een zijvlak van het andere en de viervlakken bovendien de drie aanliggende standhoeken gelijk hebben.***

Het bewijs wordt voor beide eigenschappen op dezelfde wijze geleverd. Wij geven hier in het kort het bewijs voor de eerste.

Gegeven:

$\triangle$ B C D $\backsim$ $\triangle$ *b c d*,

$\triangle$ A B D $\backsim$ $\triangle$ *a b d*;

de standhoek op B D = dien op *b d*.

Te bewijzen:

De ribben der viervlakken zijn twee aan twee evenredig.

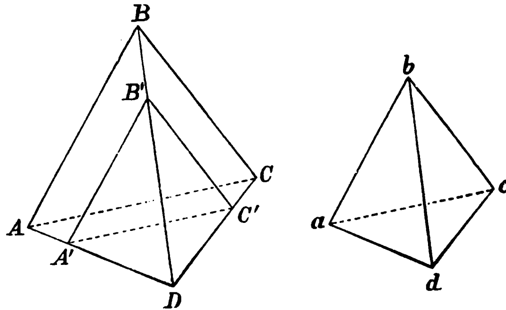


Fig. 404.

Bewijs: Voor de paren B C en *b c*, C D en *c d*, B D en *b d*, A B en ***ab***, A D en ***ad*** volgt dit onmiddellijk uit de gegeven gelijkvormigheid der twee paren zijvlakken. Er blijft dus nog slechts over te bewijzen, dat het paar A C en ***a c*** met een der vorige paren evenredig is.

Wanneer men nu op D B een stuk D B′ afmeet, dat gelijk is aan ***db*** en door B′ een vlak aanbrengt, dat || het vlak A B C is, en dat D A en D C in A′ en C′ snijdt, dan besluit men gemakkelijk, dat

$$\triangle DB'A' \cong \triangle dba \text{ en } \triangle DB'C' \cong \triangle dbc$$

is, en wegens de gegeven gelijkheid der standhoeken op B D en ***b d*** is dan het viervlak A′ B′ C′ D $\cong$ het viervlak ***abcd*** (N° 398), derhalve

$$A'C' = ac \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Maar wegens de evenwijdigheid der vlakken A B C en A′ B′ C′, moet ook A′ C′ || A C en A′ B′ || A B loopen, dus

$$A'C' : AC = DA' : DA = DB' : DB$$

of in verband met (1) en de constructie van het punt B′

$$ac : AC = db : DB.$$

Vraagstukken.

853. Een scheeve pyramide heeft tot grondvlak een regelmatigen zeshoek, waarvan de zijde 2 dM. bedraagt. Het oppervlak eener doorsnede van deze pyramide met een vlak, dat evenwijdig aan het grondvlak is, bedraagt 6 dM.^{2} Bepaal de verhouding der deelen, waarin dit vlak de opstaande ribben verdeelt.

854. Als een pyramide een regelmatigen veelhoek tot grondvlak heeft en alle opstaande ribben gelijk zijn, dan is die pyramide regelmatig. Bewijs dit.

855. Bewijs, dat in een regelmatige pyramide de tweevlakshoeken, die aan het grondvlak liggen, gelijk zijn. Evenzoo voor de tweevlakshoeken tusschen elk paar opeenvolgende opstaande zijvlakken.

856. Bepaal het geheele oppervlak van een regelmatige vijfzijdige pyramide, waarvan alle ribben 4 cM. lang zijn.

857. Van een regelmatige zeszijdige pyramide is het geheele oppervlak $18\sqrt{3}$ dM^2. Als de ribbe van het grondvlak 2 dM. bedraagt, hoe groot is dan de hoogte?

858. Een regelmatige pyramide, waarvan het grondvlak een regelmatige achthoek met zijden van 4 cM. is, terwijl de hoogte 12 cM. bedraagt, wordt op een derde van de hoogte, van den top af gerekend, gesneden door een vlak evenwijdig met het grondvlak. Bepaal het zijdelingsch oppervlak van de daardoor ontstane afgeknotte pyramide.

859. Een afgeknotte pyramide wordt gesneden door een plat vlak evenwijdig aan het grondvlak. Bewijs, dat alle opstaande zijvlakken door dat vlak in dezelfde verhouding verdeeld worden.

860. Een vlak wordt evenwijdig aan het grondvlak van een afgeknotte pyramide zoodanig aangebracht, dat het zijdelingsch oppervlak in twee gelijke deelen verdeeld wordt. Bewijs, dat het oppervlak der doorsnede van dat vlak met het lichaam gelijk is aan de halve som der oppervlakken van het grond- en het bovenvlak.

861. Bewijs, dat een viervlak door een vlak, dat evenwijdig is met twee overstaande ribben (d. z. twee ribben, die geen eindpunt gemeen hebben) volgens een parallelogram gesneden wordt.

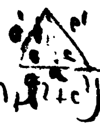
862. Welke bijzondere eigenschappen moet het viervlak in vraagstuk 861 vertoonen, opdat de doorsnede een rechthoek, een ruit, een vierkant zij.

863. Bepaal de lengte der zijden van het parallelogram in vraagstuk 861, indien de afstanden van het snijvlak tot de twee ribben, waaraan het evenwijdig loopt, zich verhouden als $m:n$, en de lengte dezer ribben respectievelijk a en b cM. bedraagt.

864. De rechten, die de middens der overstaande ribben van een viervlak verbinden, gaan door één punt en deelen elkander middendoor.

865. Twee hoogtelijnen van een willekeurig viervlak snijden elkander niet.

866. Als twee hoogtelijnen van een viervlak elkander snijden, geldt hetzelfde van de twee andere hoogtelijnen.



867. Druk de lengte eener zwaartelijn van een viervlak in de lengte der ribben uit.

868. De som van de vierkanten der zwaartelijnen staat tot de som van de vierkanten op de ribben als 4 : 9.

869. Het vlak, dat een tweevlakshoek van een viervlak middendoor deelt, verdeelt de overstaande ribbe in twee stukken, die evenredig zijn met de zijvlakken, die den tweevlakshoek begrenzen.

870. Bewijs, dat de oppervlakken van twee gelijkvormige viervlakken zich verhouden als de vierkanten van gelijkstandige ribben.

871. Bewijs, dat twee gelijkstandige hoogtelijnen van twee gelijkvormige viervlakken zich verhouden als twee gelijkstandige ribben.

HOOFDSTUK XXXIX.

VEELVLAKKEN IN HET ALGEMEEN. HET PRISMOÏDE.

215. Onder een veelvlak verstaat men een deel der ruimte, dat door een willekeurig aantal drie- of veelhoeken volkomen begrensd wordt. Men onderscheidt daaraan de zijvlakken, d. z. de begrenzende drie- of veelhoeken, de hoekpunten, d. z. de hoekpunten dezer zijvlakken, de ribben, d. z. de zijden van die drie- of veelhoeken en eindelijk de hoeken, d. z. de standhoeken tusschen elk paar aan elkander sluitende zijvlakken of de standhoeken op de ribbe.

Eigenschap 405. *Elk willekeurig veelvlak kan verdeeld worden in viervlakken.*

Bewijs: Om die verdeeling te bewerkstelligen, kieze men een willekeurig punt P *binnen* het veelvlak en verbinde dit met al de hoekpunten. Daardoor wordt het veelvlak verdeeld in een aantal pyramiden, die alle P tot top en elk een zijvlak van het veelvlak tot grondvlak hebben. Daar nu elke veelzijdige pyramide door de diagonalen in het grondvlak te trekken in driezijdige pyramiden verdeeld kan worden, blijkt dus ook de verdeeling van het geheele veelvlak in driezijdige pyramiden of viervlakken mogelijk.

Omgekeerd kan elk veelvlakkig lichaam worden beschouwd als een samenstel van viervlakken. Hierbij moeten echter twee gevallen onderscheiden worden. In de eerste plaats kunnen de viervlakken zoodanig worden samengevoegd, dat elk nieuw bijgevoegd viervlak met een zijvlak volkomen sluit op een driehoek van het lichaam, dat reeds verkregen is, zoodat drie hoekpunten samenvallen met drie hoekpunten van een voorgaand viervlak en slechts het vierde een nieuw hoekpunt van het lichaam oplevert. Zoodanige lichamen worden om hunne bijzondere eigenschappen, die wij zoo straks nader zullen leeren kennen, Eulersche veelvlakken genoemd.

In de tweede plaats kan de aansluiting zoodanig plaats hebben, dat een of meer viervlakken niet volkomen met een zijvlak passen op

een reeds verkregen zijvlak, zoodat de ribben van het eene zijvlak die van het andere zijvlak òf niet òf slechts gedeeltelijk bedekken.

Eigenschap 406. *In elk Eulersch veelvlak is de som van het aantal zijvlakken en het aantal hoekpunten twee meer dan het aantal ribben.* (Stelling van EULER).

Bewijs: In het volgende duiden wij voortdurend het aantal zijvlakken kortheidshalve door z, het aantal hoekpunten door h en het aantal ribben door r aan.

Beschouwen wij een willekeurig viervlak A B C D, dan is hiervoor

$$z = 4,\ h = 4,\ r = 6,$$

derhalve

$$z + h = r + 2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Indien hiertegen nog een tweede viervlak geplaatst wordt, kunnen drie gevallen onderscheiden worden, die wij afzonderlijk beschouwen:

1°. *Geen enkel zijvlak van het tweede viervlak* B C D E *valt in het verlengde van een der zijvlakken van het eerste viervlak* A B C D.

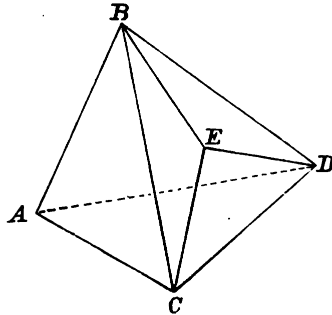


Fig. 405.

Dan vermeerdert het aantal zijvlakken met 2, want er komen drie nieuwe zijvlakken B C E, B D E en C D E bij, maar het zijvlak B C D verdwijnt. Het aantal hoekpunten vermeerdert met 1 (n.l. E) en het aantal ribben met 3, omdat drie van de zes ribben van het viervlak B C D E langs ribben van A B C D vallen. Dus is het eerste lid van de vergelijking (1) met $2 + 1$ en het tweede met drie vermeerderd, zoodat ook bij het nieuw gevormde lichaam de vergelijking (1) nog geldig zijn zal.

2°. *Een zijvlak van het viervlak* B C D E, *b. v.* B C E, *valt in het verlengde van een zijvlak van* A B C D.

Dan is dus een vlakke vierhoek A B C E ontstaan en het zijvlak B C E draagt niet bij tot vermeerdering van het aantal zijvlakken van het lichaam, zoodat z nu alleen met de zijvlakken B D E en C D E vermeerderd, maar met B C D verminderd, dus in het geheel met 1 vermeerderd is. Het aantal hoekpunten is eveneens met 1 vermeerderd (E) en het aantal ribben met 2, want E B, E C en E D zijn er bijgekomen, maar B C kan niet langer als ribbe beschouwd worden. Het eerste lid van de vergelijking (1) is in dit geval met $1 + 1$ en het tweede lid met 2 vermeerderd, zoodat ook nu nog bij het nieuw gevormde lichaam de vergelijking (1) geldig zijn zal.

3°. *Twee zijvlakken van het viervlak* B C D E *vallen in de verlengden van twee zijvlakken van het viervlak* A B C D, namelijk D C E vormt met A C D en B C E met A B C één vlak.

Dan verandert het aantal zijvlakken, noch het aantal hoekpunten, noch het aantal ribben en de vergelijking (1) blijft dus geldig.

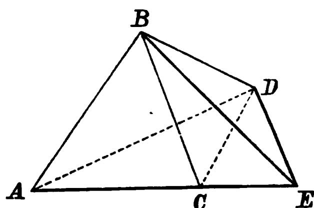


Fig. 406.

Dezelfde onderscheiding in drie gevallen en dezelfde daarbij gevonden besluiten blijven waar, indien men nu bij het uit twee viervlakken bestaande lichaam opnieuw een viervlak voegt en zoo voortdurend voortgaat.

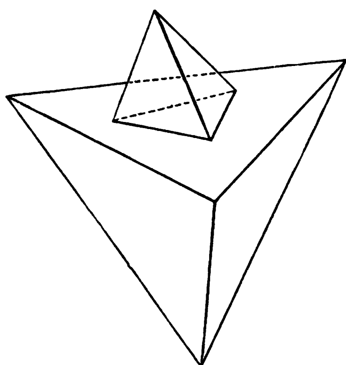
Dus geldt de betrekking (1) voor elk Eulersch lichaam.

Opmerking: Dat de stelling van Euler niet voor andere lichamen geldt, kan uit de onderstaande figuur blijken, die uit twee viervlakken bestaat, welke niet volledig met een zijvlak aan elkander sluiten. Hierin is

$$z = 7,\ h = 8,\ r = 12$$

en dus

$$z + h = r + 3.$$


Fig. 407.

216. Twee willekeurige veelvlakken worden g e l ij k en g e l ij k v o r m i g genoemd, als zij in viervlakken verdeeld kunnen worden, die twee aan twee gelijk en gelijkvormig zijn en op dezelfde wijze aan elkander sluiten.

Twee veelvlakken heeten evenzoo g e l ij k v o r m i g, als zij in viervlakken verdeeld kunnen worden, die twee aan twee gelijkvormig zijn en op dezelfde wijze aan elkander sluiten.

Uit deze bepalingen volgt, dat gelijkstandige elementen van twee gelijk- en gelijkvormige veelvlakken gelijk zijn, terwijl gelijkstandige ribben van twee gelijkvormige veelvlakken evenredig moeten zijn.

Verder zullen gelijkstandige tweevlakshoeken van gelijkvormige veelvlakken gelijk zijn.

217. Tot een meer eigenaardige beschouwing omtrent gelijkvormige veelvlakken en gelijkvormige figuren in het algemeen, geraakt men door middel van de volgende eigenschap.

Eigenschap 407. *Als men alle punten* A, B, ... *eener figuur met een willekeurig punt* P *verbindt en daarna op die rechten* P A,

PB.... *stukken* P*a*, P*b*,.... *aanneemt, zoodat de verhoudingen* $\frac{PA}{Pa}, \frac{PB}{Pb}$.... *alle dezelfde waarde hebben, dan zijn de figuren* AB.... *en* *ab*.... *gelijkvormig.*

Bewijs: In verband met het in de vorige § medegedeelde zal het voldoende zijn aan te toonen, dat deze eigenschap waar is voor een

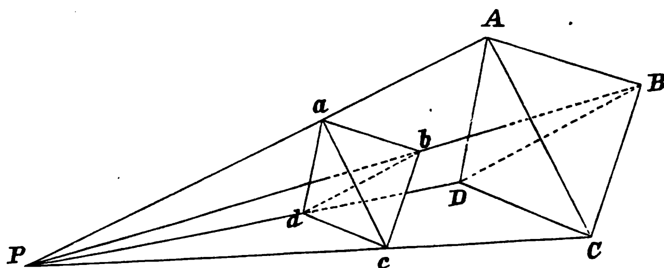


Fig. 408.

viervlak ABCD, waaruit de veelvlakken opgebouwd kunnen worden.

Uit de evenredigheden

$$Pa:PA = Pb:PB = Pc:PC = Pd:PD$$

volgt

$$ab \parallel AB, \; bc \parallel BC, \; ac \parallel AC, \text{ enz.}$$

Dus is

$$ab:AB = Pb:PB = bc:BC,$$

en op dezelfde wijze wordt de evenredigheid van elk tweetal paren ribben bewezen.

Men noemt in het algemeen P het gelijkvormigheidspunt van de gelijkvormige figuren. Het heet een uitwendig gelijkvormigheidspunt, als de punten *a*, *b*.... op de rechten PA, PB.... inwendig gelijkvormigheidspunt, als *ab*.... op het verlengde van PA, PB.... aan de zijde van P gelegen zijn.

Eigenschap 408. *Twee gelijkvormige veelvlakken kunnen steeds zoodanig geplaatst worden, dat de verbindingslijnen van gelijkstandige hoekpunten door één punt gaan.*

Bewijs: Ten einde deze eigenschap te bewijzen, kiezen wij allereerst drie niet in één rechte gelegen hoekpunten A, B, C.... van het eene veelvlak met de gelijkstandige hoekpunten *a*, *b*, *c*... van het andere uit en plaatsen de gegeven figuren zoodanig, dat de zijden van △ABC evenwijdig met die van △*abc* loopen. Dan kan gemakkelijk bewezen worden, dat A*a*, B*b* en C*c* door één punt S gaan, volgens de bij N⁰ 180 (Leerboek der planimetrie) gevolgde

methode. Zijn verder D en *d* twee andere gelijkstandige hoekpunten der veelvlakken, dan volgt uit de congruentie der viervlakken ABCD, *abcd* bij gelijke plaatsing dier figuren, dat AD en *ad* evenwijdig loopen en volgens dezelfde zooeven genoemde methode bewijst men nu, dat ook D*d* door dat punt S gaan moet. Op dezelfde wijze toont men deze eigenschap voor elke andere verbindingslijn van gelijkstandige punten aan.

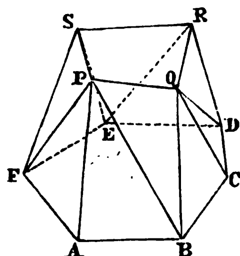


Fig. 409.

218. Een der merkwaardigste veelvlakken is het **prismoïde**. Dit lichaam wordt begrensd door twee willekeurige drie- of veelhoeken, die in evenwijdige vlakken gelegen zijn en **grond-** en **bovenvlak** genoemd worden, terwijl de **opstaande zijvlakken** ontstaan door vlakken te brengen telkens door een zijde van het grondvlak en een hoekpunt van het bovenvlak en omgekeerd.

Fig. 409 stelt zulk een lichaam voor, waarvan het grondvlak een zeshoek en het bovenvlak een vierhoek is. De opstaande zijvlakken zijn hier alle driehoeken, doch er kunnen ook trapezia daaronder voorkomen, zooals b. v. het geval zijn zou, als PQ met AB evenwijdig was.

Vraagstukken.

872. Hoe groot is het aantal viervlakken, waarin volgens N° 405 een *n*-zijdig prisma kan verdeeld worden?

873. Bewijs, dat twee prisma's gelijk en gelijkvormig zijn, als drie in één hoekpunt samenkomende zijvlakken van het eene congruent zijn met die van het andere en deze zijvlakken in de beide figuren op dezelfde wijze aan elkander sluiten.

874. Bewijs, dat van een pyramide door een vlak, dat evenwijdig loopt met het grondvlak, een pyramide wordt afgesneden, die gelijkvormig is met de oorspronkelijke.

875. Teeken een prismoïde, waarvan het grondvlak een vierhoek, het bovenvlak een driehoek is. Evenzoo een prismoïde, waarvan het grondvlak een zeshoek en het bovenvlak een driehoek is.

876. Als het grond- en het bovenvlak van een prismoïde respectievelijk een *m*- en een *n*-hoek zijn, die geen enkel paar zijden evenwijdig hebben, dan bedraagt het aantal opstaande zijvlakken $m + n$.

HOOFDSTUK XL.

DE INHOUD VAN HET PRISMA.

219. Onder den **inhoud van een lichaam** verstaat men het deel der ruimte, door dat lichaam ingenomen.

De **bepaling van den inhoud** van een lichaam is de vergelijking daarvan met een ander vast aangenomen lichaam, welks inhoud men **inhoudseenheid** noemt.

Die vergelijking van inhouden van lichamen wordt het eenvoudigst uitgevoerd bij rechthoekige parallelopipeda. Wij bewijzen daartoe hierbij een rij van drie stellingen, die een volkomene overeenstemming vertoonen met de eigenschappen, waardoor het in de planimetrie mogelijk werd, willekeurige rechthoeken met elkander te vergelijken. Om deze reden zijn de bewijzen slechts in zeer verkorten vorm erbij gevoegd.

Eigenschap 409. *Twee rechthoekige parallelopipeda met gelijke lengte, breedte en hoogte hebben gelijken inhoud.*

Men bewijst dit door aan te toonen, dat het eene lichaam de ruimte van het andere kan innemen.

Eigenschap 410. *Van twee rechthoekige parallelopipeda met gelijke lengte en breedte, doch ongelijke hoogte, is dat lichaam het grootste, dat de grootste hoogte heeft.*

Men mete de hoogte van het kleinste lichaam op die van het grootste af en brenge door het deelpunt een vlak evenwijdig aan het grondvlak van het grootste lichaam. (Als grondvlak is hier aangenomen het vlak, dat de lengte en de breedte bevat.)

Eigenschap 411. *De inhouden van twee rechthoekige parallelopipeda met gelijke lengte en breedte, maar ongelijke hoogte verhouden zich als de hoogten.*

Men bepale de verhouding der hoogten, AA' en aa' (fig. 410), waarbij twee gevallen onderscheiden moeten worden, naarmate deze een gemeene maat hebben of niet. De verhouding der inhouden wordt

dan weder uit die der hoogten bepaald door het aanbrengen van

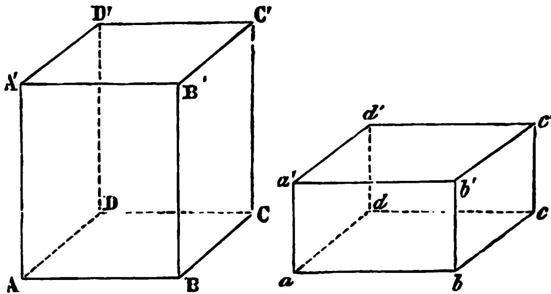


Fig. 410.

vlakken door de deelpunten der hoogten, die evenwijdig met het grondvlak van elk parallelopipedum loopen.

Opmerking: Daar de benamingen lengte, breedte en hoogte willekeurig aan drie in één hoekpunt samenkomende ribben gegeven worden, zoo kan men uit de vorige eigenschap ook besluiten:

De inhouden van twee rechthoekige parallelopipeda met gelijke lengte en hoogte, doch ongelijke breedte, verhouden zich als die breedten.

De inhouden van twee rechthoekige parallelopipeda met gelijke breedte en hoogte, doch ongelijke lengte, verhouden zich als die lengten.

Eigenschap 412. *De inhouden van twee willekeurige rechthoekige parallelopipeda verhouden zich als de producten der getallen, die de lengte, breedte en hoogte aangeven.*

Bewijs: Duiden wij lengte, breedte, hoogte en inhoud van het eene lichaam met l, b, h, I en de overeenkomstige grootheden voor het andere met l', b', h', I' aan. Ten einde nu de vergelijking dier lichamen te vergemakkelijken, zullen wij nog andere rechthoekige parallelopipeda geconstrueerd denken, zoodanig, dat als men deze met de voorgaande in een bepaalde volgorde neemt, elke twee opeenvolgende, wat lengte, breedte en hoogte betreft, slechts in één opzicht verschillen. Wij denken dus de navolgende rechthoekige parallelopipeda

	lengte,	breedte,	hoogte.
I.	l ,	b ,	h ;
II.	l ,	b ,	h' ;
III.	l ,	b' ,	h' ;
IV.	l' ,	b' ,	h' ;

en duiden de inhouden dezer lichamen met I, I_1, I_2, I' aan.

Volgens N° 395 bestaan dan de volgende evenredigheden:

$$I : I_1 = h : h',$$
$$I_1 : I_2 = b : b',$$
$$I_2 : I' = l : l',$$

dus door vermenigvuldiging der overeenkomstige leden

$$\frac{I}{I_1}\,\frac{I_1}{I_2}\,\frac{I_2}{I'} = \frac{l}{l'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'},$$

of na vereenvoudiging

$$\frac{I}{I'} = \frac{l}{l'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

220. De vorige eigenschap zullen wij nu toepassen op de vergelijking van een willekeurig rechthoekig parallelopipedum met de inhoudseenheid.

Als inhoudseenheid heeft men aangenomen den inhoud van een kubus, waarvan de ribben een lengte hebben, die gelijk is aan de lengte-eenheid.

Duidt men dus lengte, breedte, hoogte en inhoud van het willekeurige rechthoekige parallelopipedum met l, b, h, I aan, dan volgt uit (I)

$$\frac{I}{\text{de inhoudseenheid}} = \frac{l}{\text{de lengte-eenheid}} \times \frac{b}{\text{de lengte-eenheid}} \times \frac{h}{\text{de lengte-eenheid}}.$$

Kortheidshalve vervangt men alle noemers in deze vergelijking door 1 en schrijft dan ook

$$I = l\,b\,h,$$

Men is derhalve gewoon te zeggen:

Eigenschap 413. *De inhoud van een rechthoekig parallelopipedum is gelijk aan het product van lengte, breedte en hoogte.*

Nauwkeuriger is de volgende uitdrukking:

De inhoud van een rechthoekig parallelopipedum bevat zooveel inhoudseenheden als het product der getallen bedraagt, die aangeven, hoevele lengte-eenheden in de lengte, de breedte en de hoogte begrepen zijn.

Daar lengte en breedte de zijden van het grondvlak van het rechthoekige parallelopipedum vormen en het product dezer grootheden dus het oppervlak van het grondvlak voorstelt, zegt men ook wel:

De inhoud van een rechthoekig parallelopipedum is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.

221. Om nu van den inhoud van een rechthoekig parallelopipedum tot dien van een willekeurig parallelopipedum te komen, passen wij

drie achtereenvolgende vervormingen toe, die tot stand komen door bijvoeging van een driezijdig prisma en gelijktijdige aftrekking van een daarmede congruente figuur.

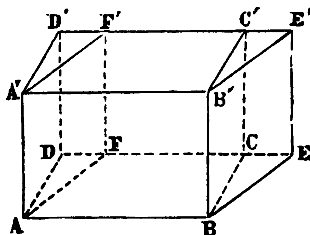


Fig. 411.

Zij ten eerste in fig. 411 A B C D, A' B' C' D' een rechthoekig parallelopipedum. Brengen wij nu door de ribben A A' en B B' twee evenwijdige vlakken, die het vlak D D' C' C en het verlengde hiervan in F F' en E E' snijden en denkt men ook het grond- en het bovenvlak verlengd, dan zijn twee driezijdige prisma's A D F A'D'F' en B C E B' C' E' ontstaan, die, zooals men gemakkelijk bewijst, congruent zijn. Denkt men nu het eerste dezer prisma's van het ppd. A B C D A' B' C' D' afgenomen, doch het tweede prisma er bij gevoegd, dan ontstaat opnieuw een parallelopipedum A B E F A' B' E' F'. Dan is

Inh. ppd. A B C D A' B' C' D' = Inh. ppd. A B E F A' B' E' F'.

Op deze wijze is dus uit het rechthoekige parallelopipedum een recht parallelopipedum ontstaan, omdat het grondvlak A B E F nu een parallelogram geworden is en hiervan geldt dan, ten gevolge van de vorige vergelijking

Inh. ppd. A B E F A' B' E' F' = opp. A B C D $\times$ A A',

en dus ook

Inh. ppd. A B E F A' B' E' F' = opp. A B E F $\times$ A A',
= grondvlak $\times$ hoogte.

Brengen wij nu vervolgens bij het rechte ppd. A B E F A' B' E' F', waarvan dus nog alle opstaande zijvlakken loodrecht op het grondvlak staan, twee evenwijdige vlakken door de ribben A F en B E van het grondvlak aan en denkt men de zijvlakken A B B' A', A' B' E' F', F E E' F' weder verlengd, tot zij deze vlakken snijden, dan ontstaan twee congruente driezijdige prisma's A A' A" F F' F" en B B' B" E E' E" en dus is weder

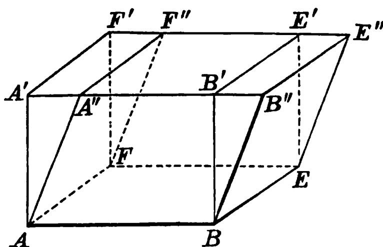


Fig. 412.

Inh. ppd. A B E F A' B' E' F' = Inh. ppd. A B E F A" B" E" F".

Deze parallelopipeda stemmen nu in grondvlak en hoogte overeen en aangezien voor den inhoud van het eerste hierboven het product van het grondvlak en de hoogte gevonden werd, zoo is dus ook

Inh. ppd. A B E F A″ B″ E″ F″ = grondvlak × hoogte.

Het laatste parallelopipedum heeft nu nog alleen deze bijzonderheid, dat twee zijvlakken, nl. A B B″ A″ en F E E″ F″ loodrecht op het grondvlak staan.

Om dus tot een willekeurig parallelopipedum te geraken, brengen wij eindelijk door de ribben A B en E F van het grondvlak twee evenwijdige vlakken A B B‴ A‴ en E F F‴ E‴ aan, waardoor na verlenging der zijvlakken van het oorspronkelijke parallelopipedum weder twee congruente driezijdige prisma's A A″ A‴ B B″ B‴ en F F″ F‴ E E″ E″ ontstaan. Dus is weder

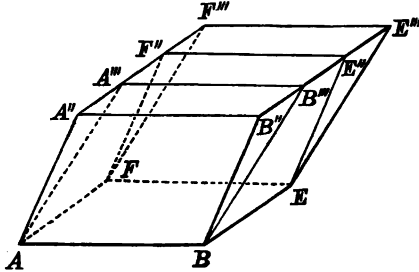


Fig. 413.

Inh. ppd. A B E F A″ B″ E″ F″ = Inh. ppd. A B E F A‴ B‴ E‴ F‴,

en daar deze figuren in grondvlak en hoogte overeenstemmen en de inhoud van de eerste gelijk was aan het product dezer grootheden, zoo vindt men dus ook

Inh. ppd. A B E F A‴ B‴ E‴ F‴ = grondvlak × hoogte.

Hiermede is bewezen:

Eigenschap 414. ***De inhoud van elk parallelopipedum is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.***

222. Wij zullen nu, ten einde tot den inhoud van een prisma te geraken, de volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 415. ***Een recht parallelopipedum kan in twee driezijdige prisma's verdeeld worden, die gelijken inhoud hebben.***

Bewijs: Brengt men namelijk door de opstaande ribben B B′ en D D′ in fig. 414 een vlak aan, dan ontstaan twee driezijdige prisma's A B D A′ B′ D′ en B C D B′ C′ D′, die elkanders ruimte innemen kunnen, zooals men gemakkelijk inziet, als men bedenkt, dat △ B C D den driehoek D A B volkomen kan bedekken en dat de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan.

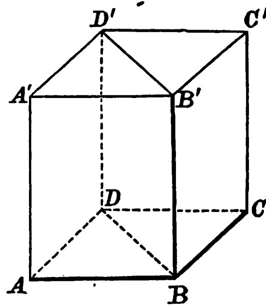


Fig. 414.

Met behulp van deze eigenschap kan men nu aantoonen:

Eigenschap 416. *Elk willekeurig parallelopipedum kan in twee driezijdige prisma's verdeeld worden, die gelijken inhoud hebben.*

Bewijs: Zij A B C D A′B′C′D′ het parallelopipedum en B D D′B′ het deelvlak, dan zijn de driezijdige prisma's A B D A′B′D′ en B C D B′C′D′ in dit geval *niet* congruent. Want, men kan het laatstgenoemde zoo draaien, dat òf △ D′C′B′ òf △ D C B den driehoek B′A′D′ volkomen bedekt. Onderstellen wij b. v. het eerste, dan valt B′ in D′ en C′ in A′, maar dan kan het vlak B′C′C B *niet* langs A′D′D A vallen, omdat de hoek tusschen de vlakken D′C′B′ en B′C′C B *niet* gelijk is aan dien tusschen de vlakken B′D′A′ en D′A′A D.

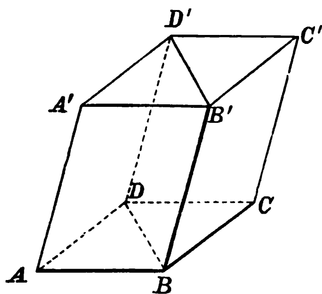


Fig. 415.

Evenzoo toont men aan, dat ook geen samenvalling der twee driezijdige prisma's mogelijk is, als men △ D C B op △ B′A′D′ plaatst.

Om de eigenschap te bewijzen brengen wij door de hoekpunten A en A′ elk een vlak aan, loodrecht staande op de ribbe A A′, en verlengen weder de zijvlakken van het oorspronkelijke parallelopipedum, zoodat een recht parallelopipedum A E F G A′E′F′G′ ontstaat, dat volgens N° 415 door het vlak D′B′B D of G′E′E G in twee gelijke deelen verdeeld wordt. Wij verkrijgen dus

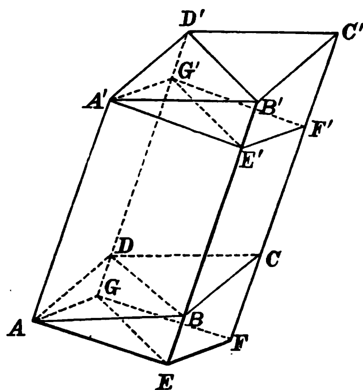


Fig. 416.

Inh. prisma A E G A′E′G′ =
Inh. prisma G E F G′E′F′ . (1)

Omdat

$$AA' = BB' \text{ en } AA' = EE$$

is, zal ook B B′ = E E′ en dus ook

$$BE = B'E'$$

zijn. Evenzoo bewijst men:

$$DG = D'G' \text{ en } FC = F'C'.$$

Omdat dan verder

$$\triangle AGE \cong \triangle A'G'E'$$

is en B E en D G $\perp$ het vlak A G E en evenzoo B′ E′ en D′ G′ $\perp$ het vlak A′ G′ E′ staan, is

$$\text{figuur } AGEBD \cong \text{figuur } A'G'E'B'D' \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Evenzoo besluit men uit de congruentie der driehoeken G E F en G′ E′ F′, de gelijkheden

$$CF = C'F', \; GD = G'D', \; BE = B'E'$$

en den loodrechten stand van C F, G D en B E op het vlak G F E en van C′ F′, G′ D′ en B′ E′ op het vlak G′ E′ F′, dat de figuur G E F D B C de ruimte van de figuur G′ E′ F′ D′ B′ C′ kan innemen, derhalve

$$\text{figuur } GEFDBC \cong \text{figuur } G'E'F'D'B'C' \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Uit (2) volgt dan nog

$$\text{Inh. prisma } AEGA'E'G' = \text{Inh. prisma } ADBA'D'B',$$

en uit (3)

$$\text{Inh. prisma } GEFG'E'F' = \text{Inh. prisma } DBCD'B'C',$$

en wegens de betrekking (1) is dus ten slotte

$$\text{Inh. prisma } ADBA'D'B' = \text{Inh. prisma } DBCD'B'C'.$$

Eigenschap 417. *De inhoud van een driezijdig prisma is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.*

Bewijs: Is A B C A′ B′ C′ het driezijdige prisma, dan kan dit volgens de vorige eigenschap als de helft van het parallelopipedum A B D C A′ B′ D′ C′ beschouwd worden. Duidt men nu de hoogte van dit parallelopipedum, die met de hoogte van het driezijdige prisma overeenstemt, met h aan, dan is

$$\text{Inh. ppd. } ABDCA'B'D'C' = \text{opp. } ABDC \times h,$$

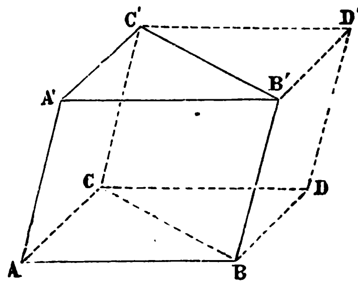


Fig. 417.

dus

$$\text{Inh. prisma } ABCA'B'C' = \tfrac{1}{2} \text{ opp. } ABDC \times h,$$
$$= \triangle ABC \times h.$$
$$= \text{grondvlak} \times \text{hoogte}.$$

Eigenschap 418. *De inhoud van een willekeurig prisma is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.*

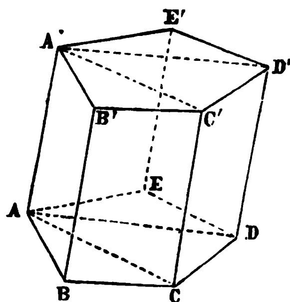


Fig. 418.

Bewijs: Indien men in fig. 418 de diagonalen in het grond- en bovenvlak van het prisma trekt en door elk paar evenwijdige diagonalen een vlak brengt, wordt het willekeurige prisma in driezijdige prisma's verdeeld, die alle dezelfde hoogte h, tevens de hoogte van het willekeurige prisma, hebben. Nu is

$$\text{prisma } ABCA'B'C' = \triangle ABC \times h,$$
$$\text{„ } ACDA'C'D' = \triangle ACD \times h,$$
$$\text{„ } ADEA'D'E' = \triangle ADE \times h,$$

en door optelling ontstaat

$$\text{prisma } ABCDEA'B'C'D'E' = (\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE) \times h,$$
$$= \text{vijfhoek } ABCDE \times h,$$
$$= \text{grondvlak} \times \text{hoogte}.$$

Vraagstukken.

877. Bepaal den inhoud van een recht parallelopipedum, waarvan het grondvlak een ruit is met diagonalen van 8 en 6 cM., indien het geheele oppervlak 248 cM^2. bedraagt.

878. In een parallelopipedum verhouden zich twee zijvlakken omgekeerd als hunne afstanden tot de overstaande zijvlakken.

879. De inhoud van een driezijdig prisma is gelijk aan het halve product van een der opstaande zijvlakken met den afstand van dit zijvlak tot de niet daarin gelegen opstaande ribbe.

880. Alle driezijdige prisma's, welker opstaande ribben langs drie gegeven evenwijdigen liggen en een standvastige lengte hebben, hebben gelijken inhoud.

881. De inhoud van een prisma is gelijk aan het product van de lengte van een der opstaande ribben met het oppervlak eener loodrechte doorsnede.

N.B. Voor het bewijs passe men de bij N⁰ 416 gevolgde methode toe.

882. Indien men de loodrechte doorsnede van een driezijdig prisma beschouwt, als de projectie van het grondvlak op een vlak, dat loodrecht op een der opstaande ribben staat, wat besluit men dan uit het

vorige vraagstuk omtrent de verhouding van het o
tot dat van de geprojecteerde figuur?

883. Bepaal den inhoud van een regelmatig dı
van alle ribben 8 cM. lang zijn.

884. Bepaal het oppervlak van een regelmatiı
als de straal van het grondvlak 4 cM. en de inh

885. Als een opstaande ribbe van een prisma,
driehoek tot grondvlak heeft, met de beide in h
het grondvlak uitkomende ribben hoeken van
is dan de inhoud van het lichaam. De zijde van l
a cM. en de opstaande ribbe *b* cM.

886. Hoe groot is de inhoud van een recht
de opstaande zijvlakken 2,6, 2,8 en 3 dM². zijn,
84 cM². bedraagt.

887. Bepaal den inhoud van een prisma, d
tienhoek met zijden van twee 2 dM. tot grond
opstaande ribbe gelijk is aan den straal van den
van den tienhoek en een hoek van 45° met het

HOOFDSTUK XLI.

DE INHOUD VAN DE PYRAMIDE EN VAN DE AFGEKNOTTE PYRAMIDE.

223. **Eigenschap 419.** *Een pyramide is de grens, waartoe de som van een aantal prisma's nadert.*

Bewijs: Zij in fig. 419 een willekeurige pyramide T A B C D voorgesteld. Denken wij een opstaande ribbe, b. v. T A, in een aantal gelijke deelen, dat wij door *n* voorstellen, verdeeld, waardoor de deel-

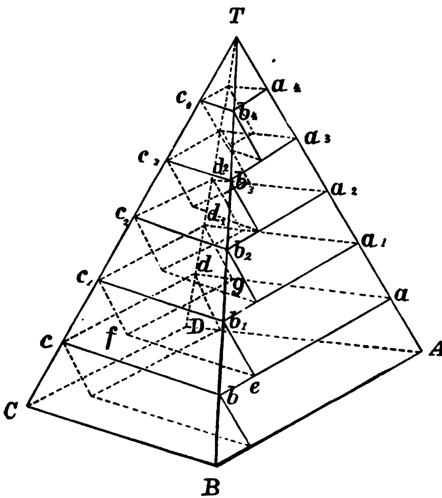


Fig. 419.

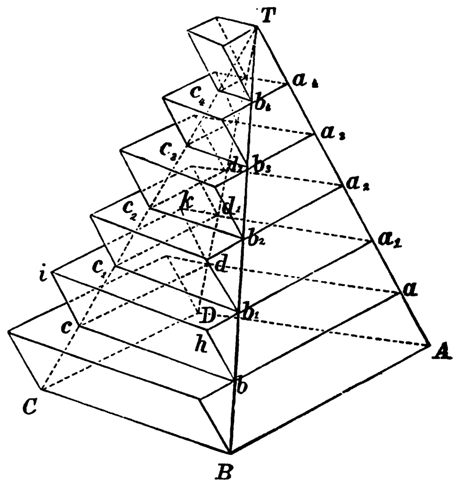


Fig. 420.

punten a, a_1, a_2,... ontstaan. Brengt men dan door elk dezer punten een vlak, dat evenwijdig met het grondvlak A B C D loopt, dan ontstaat een aantal gelijkvormige doorsneden. Nu kan men op elk dezer doorsneden als bovenvlak een prisma beschrijven, waarvan de opstaande

ribben || T A zijn, zooals b. v. $a_1 b_1 c_1 d_1 a e f g$ (fig. 419) en de som dezer prisma's is dan klaarblijkelijk kleiner dan de pyramide. Beschrijft men echter op het grondvlak der pyramide en ook op elke doorsnede als grondvlak een prisma, waarvan de opstaande ribben || T A zijn, zooals b. v. $a b c d a_1 h i k$ (fig. 420), dan zal de som der aldus verkregen prisma's klaarblijkelijk grooter zijn dan de pyramide. Hoe groot men nu ook het aantal deelen *n* neemt, waarin T A verdeeld is, steeds blijft het vorige waar, zoodat de pyramide voortdurend blijft binnen de grenzen, door de som van die „ingeschreven" en van die „omgeschreven" prisma's gesteld. Maar hoe grooter *n* wordt, des te minder gaan die beide sommen van elkander verschillen, zoodat elke som meer en meer tot de pyramide nadert.

Eigenschap 420. *Twee pyramiden met gelijk grondvlak en gelijke hoogte hebben gelijken inhoud.*

Onder de hoogte eener pyramide verstaat men de loodlijn, uit den top op het grondvlak neergelaten.

Bewijs: Denkt men zich de pyramiden met de gelijke grondvlakken A B C en A′ B′ C′ op een zelfde vlak U geplaatst, dan zullen de toppen

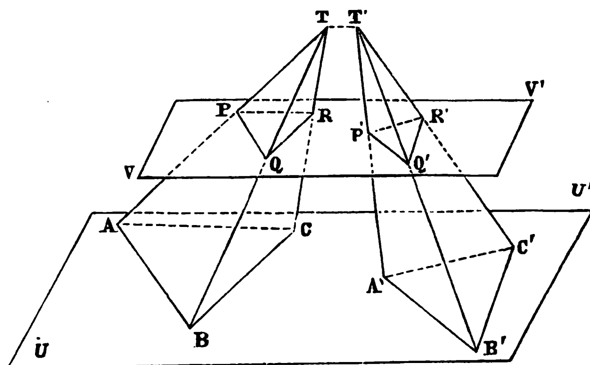


Fig. 421.

volgens het gegevene gelijken afstand van dat vlak hebben. Brengt men nu evenwijdig aan het vlak U een aantal snijdende vlakken aan, en construeert men op de aldus verkregen evenwijdige doorsneden weder de „ingeschreven" prisma's, dan zal met elk prisma, dat door twee opeenvolgende evenwijdige vlakken bij de pyramide T A B C ingesloten wordt, een prisma bij de andere figuur T′ A′ B′ C′ overeenstemmen en twee zulke overeenkomstige prisma's zijn, zooals wij bewijzen zullen, gelijk.

Beschouwen wij namelijk de doorsneden P Q R en P′ Q′ R′ door een zelfde vlak V V′ bepaald, en noemen wij de afstanden van elk der

toppen tot de vlakken V V′ en U U′ respectievelijk h en H, dan heeft men volgens N° 389

$$\triangle PQR : \triangle ABC = h^2 : H^2,$$

en

$$\triangle P'Q'R' : \triangle AB'C' = h^2 : H^2,$$

waaruit men besluit, omdat volgens het gegevene $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ is, dat ook

$$\triangle PQR = \triangle P'Q'R'$$

zijn moet. Twee tusschen dezelfde evenwijdige vlakken gelegen „ingeschreven" prisma's hebben dus steeds gelijk grondvlak en gelijke hoogte en zijn daarom gelijk. Derhalve moet nu ook de som der ingeschreven prisma's van de pyramide T A B C gelijk zijn aan de som der ingeschreven prisma's van de pyramide T′ A′ B′ C′ en daar deze gelijkheid steeds bestaan blijft, hoe dicht ook elk dier sommen tot elk der pyramiden nadert, besluit men

Inh. pyramide T A B C = Inh. pyramide T′ A′ B′ C′.

224. **Eigenschap 421.** ***Elk driezijdig prisma kan verdeeld worden in drie driezijdige pyramiden, die gelijken inhoud hebben.***

Bewijs: Zij A B C D E F het driezijdige prisma. Brengt men een vlak door een der hoekpunten E van het bovenvlak en de overstaande ribbe A C van het grondvlak, dat de opstaande zijvlakken A B E D en B C F E volgens A E en E C snijdt, dan is het prisma verdeeld in een driezijdige pyramide E A B C en een vierzijdige E A C F D. Brengt men vervolgens een vlak door het hoekpunt A en de ribbe E F van het bovenvlak, dat het vlak A C F D volgens A F snijdt, dan is het prisma verdeeld in drie pyramiden E A B C, E F A C en E F A D, die, zooals wij bewijzen zullen, gelijken inhoud hebben.

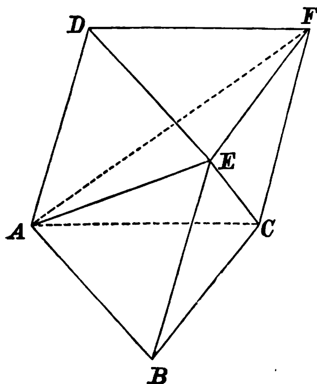


Fig. 422.

Neemt men toch de beide eerste en beschouwt als hunne grondvlakken de driehoeken B C E en E C F, dan hebben zij den gemeenschappelijken top A. Maar die driehoeken zijn gelijk, als de helften van het parallelogram B F, en de hoogte der beide pyramiden is dezelfde, namelijk de loodlijn, uit A op dit parallelogram neergelaten; dus zijn de pyramiden E A B C en E F A C gelijk van inhoud. Op dezelfde wijze blijkt de gelijkheid der pyramiden E F A C

en E F A D, wanneer men E als den gemeenschappelijken top, A C F en A D F als de grondvlakken beschouwt.

Opmerking: Omgekeerd kan bij elke driehoekige pyramide een driehoekig prisma geconstrueerd worden, dat driemaal de pyramide bevat. Gaat men toch uit van de pyramide E A B C, dan brenge men door den top E een vlak evenwijdig aan het grondvlak, en trekke door twee der hoekpunten van het grondvlak, hier A en C, rechten evenwijdig met de opstaande ribbe, die door het derde hoekpunt B van het grondvlak gaat, totdat deze rechten het vlak door E evenwijdig aan het grondvlak gebracht, ontmoeten in D en F. Het bovenvlak D E F is dan gevonden en het prisma A B C D E F zal driemaal de oorspronkelijke pyramide bevatten.

Eigenschap 422. *De inhoud van een driezijdige pyramide is gelijk aan het derde deel van het product van grondvlak en hoogte.*

Bewijs: Zij namelijk E A B C in fig. 422 de gegeven driezijdige pyramide, waarbij het prisma A B C D E F geconstrueerd is. Dan is de loodlijn, uit E op het vlak A B C neergelaten, zoowel de hoogte van de pyramide als van het prisma, die wij met h aanduiden zullen. Volgens de vorige eigenschap is nu

$$\begin{aligned} \text{Inh. pyr. EABC} &= \tfrac{1}{3}\,\text{Inh. prisma ABCDEF},\\ &= \tfrac{1}{3}\,\triangle\,\text{ABC} \times h,\\ &= \tfrac{1}{3}\,\text{grondvlak} \times \text{hoogte}. \end{aligned}$$

Eigenschap 423. *De inhoud van een willekeurige pyramide is gelijk aan het derde deel van het product van grondvlak en hoogte.*

Bewijs: Brengt men namelijk in de willekeurige pyramide T A B C D E vlakken aan door den top T en elk der diagonalen A C, A D van het grondvlak, dan wordt de pyramide in driezijdige pyramiden verdeeld, die alle dezelfde hoogte T P $= h$, tevens de hoogte der geheele pyramide, hebben. Nu is

$$\begin{aligned} \text{Inh. pyr. TABC} &= \tfrac{1}{3}\,\triangle\,\text{ABC} \times h,\\ \text{Inh. pyr. TACD} &= \tfrac{1}{3}\,\triangle\,\text{ACD} \times h,\\ \text{Inh. pyr. TADE} &= \tfrac{1}{3}\,\triangle\,\text{ADE} \times h, \end{aligned}$$

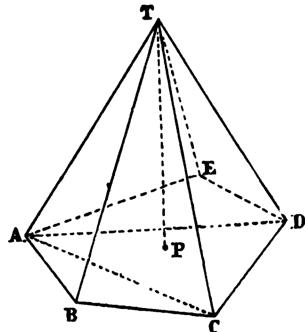


Fig. 423.

dus door optelling:

$$\begin{aligned} \text{Inh. pyr. TABCDE} &= \tfrac{1}{3}\,(\triangle\,\text{ABC} + \triangle\,\text{ACD} + \triangle\,\text{ADE}) \times h,\\ &= \tfrac{1}{3}\,\text{vijfhoek ABCDE} \times h,\\ &= \tfrac{1}{3}\,\text{grondvlak} \times \text{hoogte}. \end{aligned}$$

225. **Eigenschap 424.** *De inhoud van een afgeknotte pyramide is gelijk aan het derde deel van de hoogte, vermenigvuldigd met de som der oppervlakken van het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat middelevenredig is tusschen grond- en bovenvlak.*

Bewijs: Zij in fig. 424 A B C D $abcd$ de afgeknotte pyramide, ontstaan door snijding van de pyramide T A B C D. Men kan dan de afgeknotte pyramide beschouwen als het verschil van de pyramiden T A B C D en T $abcd$.

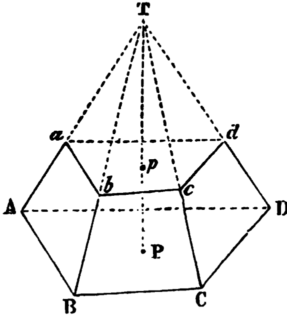


Fig. 424.

Laat men uit T een loodlijn op de vlakken A B C D en $abcd$ neer, die deze in P en p ontmoet, dan is P p = de hoogte der afgeknotte pyramide = H. Zij verder

$$\text{opp. } ABCD = G, \text{ opp. } abcd = B,$$

en stellen wij eindelijk T $p = h$, dan is ter berekening van de inhouden der pyramiden T A B C D en T $abcd$ noodig T P en T p, dus h te berekenen.

Volgens N⁰ 389 is

$$G : B = (H + h)^2 : h^2,$$

dus

$$\sqrt{G} : \sqrt{B} = (H + h) : h,$$

waaruit men h kan oplossen; men vindt dan

$$h = \frac{H\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}},$$

en hiermede wordt

$$TP = H + h = \frac{H\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}.$$

Nu is

$$\text{Inh. afgeknotte pyramide} = \tfrac{1}{3} G \times TP - \tfrac{1}{3} B \times Tp,$$

$$= \tfrac{1}{3} H \frac{G\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} - \tfrac{1}{3} H \frac{B\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}},$$

$$= \tfrac{1}{3} H \frac{G\sqrt{G} - B\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}},$$

$$= \tfrac{1}{3} H (G + B + \sqrt{BG}).$$

226. **Eigenschap 425.** ***Een afgeknot driezijdig prisma is gelijk aan de som van drie pyramiden, die elk het grondvlak van het prisma tot grondvlak en een der drie hoekpunten van het bovenvlak van het afgeknotte prisma tot top hebben.***

Bewijs: Een afgeknot driezijdig prisma A B C D E F (fig. 425) kan op dezelfde wijze in drie pyramiden verdeeld worden als het driezijdig prisma in fig. 422. Brengt men namelijk een vlak door een der hoekpunten E van het bovenvlak en de overstaande ribbe A C van het grondvlak, vervolgens een vlak door het hoekpunt A van het grondvlak en de ribbe E F van het bovenvlak, dan is het afgeknotte prisma verdeeld in de drie viervlakken E A B C, E A C F en E A D F.

Van deze voldoet de eerste aan de voorwaarde, dat haar grondvlak met dat van het afgeknotte prisma samenvalt en haar top in een hoekpunt van het bovenvlak van het afgeknotte prisma ligt.

Vergelijkt men vervolgens de tweede der zooeven genoemde pyramiden E A C F met F A B C, en beschouwt men het hoekpunt A als haar gemeenschappelijken top, dan is de driehoek E C F het grondvlak van de eerste en driehoek B C F dat van de tweede. Doch deze driehoeken zijn gelijk, omdat zij dezelfde basis C F bezitten en de toppen E en B op een lijn, evenwijdig aan die basis, zijn gelegen. De beide pyramiden hebben dus gelijke grondvlakken en dezelfde hoogte, zoodat zij gelijken inhoud hebben.

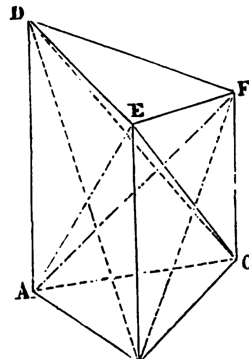


Fig. 425.

Beschouwt men ten slotte de laatste van het drietal pyramiden, waarin het afgeknotte prisma kon verdeeld worden, namelijk de pyramide E A D F, met de figuur D A B C, neemt men daarbij tot top van de eerste het hoekpunt F en tot top van de tweede het hoekpunt C, dan zijn de grondvlakken dier lichamen de driehoeken D A E en D A B. Deze driehoeken zijn gelijk, omdat zij de basis D A gemeen hebben en de toppen E en B op een rechte, evenwijdig met die basis, zijn gelegen. Verder liggen de toppen der pyramiden op een lijn C F, die evenwijdig loopt aan de grondvlakken, zoodat de hoogten der pyramiden ook gelijk zijn. Hieruit blijkt dus volgens N° 420, dat de viervlakken E A D F en D A B C gelijken inhoud hebben, zoodat men eindelijk de vergelijking verkregen heeft:

afgeknot prisma A B C D E F = pyr. E A B C +
pyr. D A B C + pyr. F A B C.

Eigenschap 426. *Een afgeknot driezijdig prisma is gelijk aan een derde deel van het product van het oppervlak der loodrechte doorsnede met de som der opstaande ribben.*

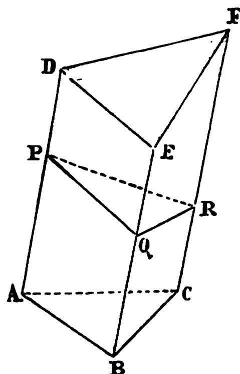


Fig. 426.

Bewijs: Brengt men namelijk in een scheef afgeknot driehoekig prisma A B C D E F (fig. 426) een vlak P Q R loodrecht op de opstaande ribben, dan wordt het lichaam verdeeld in twee afgeknotte prisma's P Q R D E F en P Q R A B C, waarin nu, als men bij elk P Q R als grondvlak beschouwt, de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan. Een der pyramiden b.v. E P Q R, waarin men P Q R D E F volgens N⁰ 425 kan verdeelen, heeft dus tot inhoud

$$\tfrac{1}{3}\,\triangle PQR \times FQ.$$

Volgens N⁰ 425 is dus

$$\text{Inh. afgekn. prisma } PF = \triangle PQR \times \tfrac{1}{3}(PD + QE + RF),$$
$$\text{Inh. afgekn. prisma } PC = \triangle PQR \times \tfrac{1}{3}(PA + QB + RC),$$

dus door opt.

$$\text{Inh. afgekn. prisma } AF = \triangle PQR \times \tfrac{1}{3}(AD + BE + CF).$$

Eigenschap 427. *De inhoud van een willekeurig prisma is gelijk aan het product van de loodrechte doorsnede en een der opstaande ribben.*

Bewijs: Beschouwen wij allereerst een driezijdig prisma.

Laat men namelijk in fig. 426 het vlak D E F zich verplaatsen, zoodat het evenwijdig met het grondvlak A B C wordt, dan zal in het vorige bewijs niets veranderd worden; dus is

een driezijdig prisma = de loodrechte doorsnede ×
⅓ van de som der drie opstaande ribben,
= de loodrechte doorsnede × de opstaande ribbe.

Beschouwt men nu verder een willekeurig prisma en verdeelt men dit in driezijdige prisma's door vlakken te brengen door elk tweetal evenwijdige diagonalen van grond- en bovenvlak, past daarna op elk deel de zooeven gevonden formule toe, dan blijkt bij optelling onmiddellijk, dat die formule ook voor het willekeurige prisma geldt.

227. **Eigenschap 428.** *De inhoud van een prismoïde is gelijk aan het zesde deel van den afstand tusschen grond- en bovenvlak, vermenigvuldigd met de som der oppervlakken van het grondvlak, het bovenvlak en het viervoud van het vlak, dat evenwijdig aan deze op de helft van den afstand wordt aangebracht.*

Bewijs: Het vlak, dat in het midden van den afstand tusschen het

grond- en bovenvlak, evenwijdig aan deze, wordt aangebracht, snijdt het lichaam volgens een veelhoek K L M... S, waarvan de zijden gedeeltelijk evenwijdig aan die van het grondvlak, voor het overige evenwijdig aan die van het bovenvlak loopen. De opstaande ribben van het lichaam, b.v. A I, worden door dit vlak in twee gelijke deelen verdeeld. Wij noemen dit vlak het **middenvlak** en stellen het door M voor.

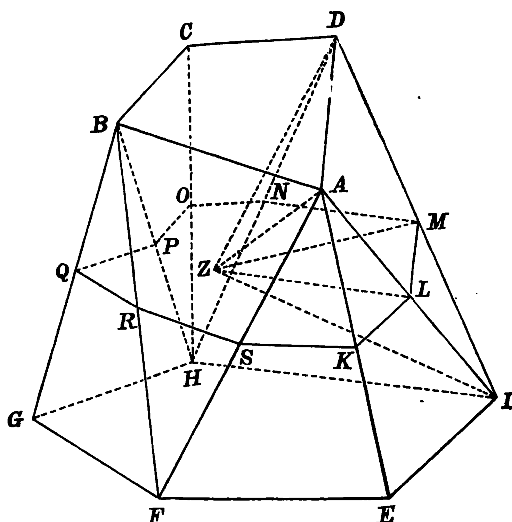


Fig. 427.

Zij verder

opp. A B C D = B,
opp. E F G H I = G,

en de afstand van deze vlakken of de hoogte van het prismoïde = H.

Kiest men nu een willekeurig punt Z in het middenvlak en verbindt dit met al de hoekpunten van het grond- en bovenvlak, dan is het prismoïde verdeeld in de twee pyramiden Z A B C D en Z E F G H I en de som van een aantal pyramiden, die Z tot top en een der opstaande zijvlakken b. v. A D I tot grondvlak hebben.

Nu is

Inh. pyr. Z A D I $= \frac{1}{3} \triangle$ A D I $\times$ de loodlijn uit Z op het vlak A D I.

Maar, omdat L M || A D is, zal

$$\triangle ADI \backsim \triangle ILM$$

zijn, terwijl bovendien A I = 2 A L is, dus moet

$$\triangle ADI = 4 \triangle ILM$$

zijn; derhalve wordt

Inh. pyr. Z A D I $= 4 \times \frac{1}{3} \triangle$ I L M $\times$ de loodlijn uit Z op het vlak I L M,
$= 4 \times$ pyr. Z I L M,
$= 4 \times \frac{1}{3} \triangle$ Z L M $\times$ de loodlijn uit I op het vlak Z L M,
$= 4 \times \frac{1}{3} \triangle ZLM \times \frac{1}{2}H$,
$= \frac{2}{3} \triangle ZLM \times H$.

Behandelt men op deze wijze alle pyramides, die Z tot top en een opstaand zijvlak van het prismoïde tot grondvlak hebben, en telt de uitkomsten samen, dan ziet men gemakkelijk in, dat voor deze som gevonden moet worden

$$\tfrac{2}{3}\,(\text{veelhoek } K\,L\,M \ldots S) \times H = \tfrac{2}{3}\,M\,H.$$

Voegt men hierbij nu nog

$$\text{Inh. pyr. } Z\,A\,B\,C\,D = \tfrac{1}{3}\,\text{vierhoek } A\,B\,C\,D \times \text{de loodlijn uit } Z \text{ op het vlak } A\,B\,C\,D,$$
$$= \tfrac{1}{6}\,B\,H,$$

en

$$\text{Inh. pyr. } Z\,E\,F\,G\,H\,I = \tfrac{1}{6}\,G\,H,$$

dan vindt men ten slotte voor den inhoud van het prismoïde

$$\tfrac{1}{6}\,G\,H + \tfrac{1}{6}\,B\,H + \tfrac{2}{3}\,M\,H = \tfrac{1}{6}\,H\,(G + B + 4\,M).$$

Vraagstukken.

888. Bepaal den inhoud van een viervlak, dat door vier gelijkzijdige driehoeken begrensd wordt, als de ribben a cM. lang zijn.

889. Twee zijvlakken van een viervlak zijn omgekeerd evenredig met de daarop neergelaten hoogtelijnen.

890. Als van een regelmatige vierzijdige pyramide de zijde van het grondvlak 5 cM. en het geheele oppervlak 90 cM^2. bedraagt, hoe groot is dan de inhoud?

891. Van een regelmatige zeszijdige pyramide is de zijde van het grondvlak 4 cM. en de opstaande ribbe bedraagt $4\sqrt{3}$ cM. Hoe groot is de inhoud?

892. Bewijs, dat de inhouden van twee gelijkvormige pyramiden zich verhouden als de derde machten van gelijkstandige ribben.

893. Bewijs, dat de inhouden van twee gelijkvormige veelvlakken zich verhouden als de derde machten van gelijkstandige ribben.

894. Een pyramide wordt door een vlak, evenwijdig met het grondvlak in twee gelijke deelen verdeeld. Wat weet gij van de stukken, waarin de opstaande ribben door dit vlak verdeeld worden?

895. Van een regelmatige afgeknotte twaalfzijdige pyramide is de straal van het grondvlak 4 cM., die van het bovenvlak 2 cM. en de hoogte 5 cM. Bepaal den inhoud.

896. Van een afgeknotte pyramide zijn het grondvlak G, het bovenvlak B en de hoogte h gegeven. Op welken afstand van het grondvlak moet een vlak evenwijdig daarmede aangebracht worden, opdat het lichaam middendoor gedeeld worde?

897. Van een regelmatige afgeknotte pyramide is het grondvlak een vierkant mét zijden van 2 dM., terwijl de opstaande zijvlakken hoeken van 60° met het grondvlak maken. Als het apothema van de afgeknotte pyramide 1 dM. bedraagt, hoe groot is dan de inhoud van het lichaam?

898. Een regelmatig driezijdig prisma, waarvan de zijden van het grondvlak 2 dM. lengte hebben, terwijl de hoogte 6 dM. bedraagt, wordt door een plat vlak, dat door één der ribben van het bovenvlak gaat en een hoek van 45° met dat bovenvlak vormt, afgeknot. Bepaal den inhoud van het ontstane lichaam.

899. Bewijs, dat bij een afgeknot parallelopipedum de som van twee overstaande opstaande ribben gelijk is aan de som der beide andere.

900. De inhoud van een afgeknot parallelopipedum is gelijk aan het product van de loodrechte doorsnede met de halve som van twee overstaande ribben.

901. De inhoud van het lichaam, dat van twee tegengestelde veelvlakshoeken wordt afgesneden door een paar evenwijdige vlakken, die een afstand h hebben, terwijl de oppervlakken der doorsneden G en B bedragen, is $\frac{1}{3} h (G + B - \sqrt{GB})$.

902. Brengt men in een afgeknot driezijdig prisma een vlak aan, evenwijdig met een der opstaande zijvlakken, dat den afstand h tusschen dat zijvlak en de overstaande ribbe h middendoor deelt, en duidt men de oppervlakken van het zijvlak en van de doorsnede met G en M aan, dan is de inhoud van het afgeknotte prisma gelijk aan $\frac{1}{6} h (G + 4 M)$.

903. De inhoud van een viervlak is gelijk aan $\frac{2}{3}$ van het product van den afstand van twee kruisende ribben met het oppervlak van een doorsnede, die evenwijdig met die beide ribben in het midden van haar afstand aangebracht wordt.

Herhaling.

904. Bewijs, dat de som der loodlijnen, uit de hoekpunten van een driehoek op een willekeurig vlak neergelaten, gelijk is aan driemaal

de loodlijn, uit het zwaartepunt van den driehoek op het vlak neergelaten.

905. De som der afstanden van de hoekpunten van een parallelopipedum tot een willekeurig vlak is gelijk aan achtmaal den afstand van het middelpunt van het parallelopipedum tot dat vlak.

906. In een viervlak, waarvan de overstaande ribben twee aan twee elkander loodrecht kruisen, gaan de vier hoogtelijnen door één punt.

907. De vier viervlakken, waarin een willekeurig viervlak verdeeld kan worden door het zwaartepunt met de hoekpunten te verbinden, hebben gelijken inhoud.

908. Het vlak, dat door een ribbe van een viervlak en het midden der overstaande ribbe gebracht wordt, deelt het viervlak middendoor.

909. Door een rechte in een der zijvlakken van een viervlak een vlak te brengen, dat het viervlak halveert.

910. Als van een afgeknotte pyramide, die een vierkant tot grondvlak heeft, de hoogte 2 dM., de inhoud 6,5 $d.M^3$. en de zijde van het bovenvlak 1 dM. bedraagt, hoe groot is dan het grondvlak?

911. Een vlak, dat door de middens van twee paren overstaande ribben van een viervlak gebracht wordt, verdeelt het lichaam in twee deelen van gelijken inhoud.

912. De hoogte van een regelmatig viervlak is gelijk aan de som der loodlijnen, uit een punt binnen het viervlak op de zijvlakken neergelaten.

913. Op een willekeurig prisma, waarvan het grondvlak een oppervlak heeft, dat door G cM^2. wordt voorgesteld, terwijl de hoogte h cM. bedraagt, wordt een pyramide geplaatst, zoodat het grondvlak der pyramide het bovenvlak van het prisma volkomen bedekt. Als de hoogte der pyramide H cM. is, vraagt men op welken afstand van het grondvlak een vlak, daarmede evenwijdig, aangebracht moet worden, opdat het geheele lichaam in twee gelijke deelen verdeeld worde.

914. Van een regelmatige vierhoekige pyramide is de opstaande ribbe $\sqrt{3}$ en de zijde van het grondvlak 2 el; men vraagt hieruit den standhoek van het grondvlak met elk der opstaande zijvlakken te berekenen. (Eindex. h. b. s. 1866, Gelderland.)

915. Een driehoekige pyramide, waarvan gegeven zijn de ribben van het grondvlak a, b en c, wil men in drie gelijke deelen verdeelen door twee vlakken, die beide door den top en door het midden van de ribbe a gaan; men vraagt de deelen te berekenen, waarin de ribben b en c door die vlakken verdeeld worden. (Eindex. h. b. s. 1866, Gelderland.)

916. Van een afgeknotte regelmatige vierhoekige pyramide is de

ribbe van het grondvlak 48, die van het bovenvlak 3 en de opstaande ribbe 33,75 duim. Men vraagt de inhouden van de beide gelijkvormige afgeknotte pyramiden, waarin de gegevene verdeeld kan worden door een vlak evenwijdig aan grond- en bovenvlak. (Eindex. h. b. s. 1866, Gelderland.)

917. Bewijs, dat de inhoud eener afgeknotte pyramide gelijk is aan een zesde der hoogte, vermenigvuldigd met de som van grondvlak, bovenvlak en viermaal de doorsnede der pyramide met een vlak, dat evenwijdig is met het grondvlak in het midden der hoogte. Als bekend wordt aangenomen de inhoud eener pyramide, uitgedrukt in basis en hoogte. (Eindex. h. b. s. 1867, Utrecht.)

918. Van een driehoekige pyramide hebben de opstaande zijvlakken elk een tophoek van 60°. Indien nu de opstaande ribben 1, 2 en 3 palm lang zijn, vraagt men den inhoud dezer pyramide te berekenen. (Eindex. h. b. s. 1867, Limburg.)

919. Van een kubus wordt een driehoekige pyramide afgesneden, waarvan de top gelegen is in een der hoekpunten van den kubus en de opstaande ribben met die van den kubus samenvallen. Indien die opstaande ribben alle gelijk zijn, vraagt men naar de hoogte der pyramide en naar de plaats, waar haar grondvlak de ribben van den kubus snijdt, als de inhoud der pyramide een zesde bedraagt van dien van den kubus. (Eindex. h. b. s. 1878.)

920. Van een lichaam is het grondvlak een rechthoek; de opstaande zijvlakken, die door de langste zijden van het grondvlak gaan, maken met dit laatste hoeken van 30°, terwijl de beide andere zijvlakken, gaande door de kortste zijden van den rechthoek, met het grondvlak hoeken van 60° maken. Men vraagt den inhoud van het lichaam, als de zijden van het grondvlak *a* en *b* zijn. (Eindex. h. b. s. 1879.)

921. Van een kubus wordt door een vlak, dat loodrecht staat op een der diagonalen, een driehoekige pyramide afgesneden. Men vraagt de verhouding te bepalen tusschen de stukken, waarin de diagonaal door dat vlak wordt verdeeld, wanneer het oppervlak der pyramide $\frac{1}{8}$ deel van dat van den kubus is. (Eindex. h. b. s. 1880.)

922. Van een regelmatige vijfzijdige pyramide is een zijde van het grondvlak *a*. Men weet tevens, dat, als de opstaande zijvlakken om de ribben van het grondvlak worden neergeslagen, tot zij in het vlak, waarop het grondvlak rust, komen te liggen, de opstaande ribben in het verlengde der zijden van den vijfhoek zullen komen. Men vraagt den inhoud dezer pyramide. (Eindex. h. b. s. 1882.)

923. Van een kubus wordt door vlakken, welke loodrecht zijn op de diagonalen, aan elk der hoekpunten een even groot stuk afgesneden en wel zoodanig, dat het oppervlak van het overblijvende lichaam $\frac{5}{6}$ deel van het oppervlak van den kubus is. Hoe groot is de inhoud

van het overblijvende lichaam, wanneer de inhoud van den kubus als eenheid wordt aangenomen? (Eindex. h. b. s. 1885.)

924. Twee overstaande ribben van een viervlak kruisen elkander rechthoekig en zijn gelijk aan a en b. Indien dit viervlak gesneden wordt door een vlak evenwijdig met die ribben en daartusschen gelegen, vraagt men 1°. te bewijzen, dat de doorsnede een rechthoek is; 2°. de oppervlakte van dezen rechthoek te berekenen, als de afstanden der ribben a en b tot dit vlak zich verhouden als $1 : 2$. (Eindex. h. b. s. 1893.)

HOOFDSTUK XLII.

GEBOGEN OPPERVLAKKEN IN HET ALGEMEEN. DE CYLINDER. — DE KEGEL.

228. In § 1 is een vlak of oppervlak bepaald als een samenstel van lijnen, zoodat elk punt van een lijn aan één punt van een voorafgaande en één punt van een volgende lijn aansluit, waarop alleen de punten van de eerste en de laatste lijn een uitzondering maken, die een deel van de grenzen van het oppervlak vormen. Daar een lijn evenzeer als een aaneenschakeling van punten bepaald is, zoo kan men dus een oppervlak ook als een samenstel van punten beschouwen.

Elke rechte, die een willekeurig punt A van een oppervlak met een ander willekeurig punt B daarvan verbindt, wordt een snijlijn genoemd.

Zijn de punten A en B echter twee opeenvolgende punten, dan wordt hun verbindingslijn raaklijn genoemd en elk der punten A en B heet raakpunt, terwijl men weder gewoon is, omdat die twee punten toch niet van elkander te onderscheiden zijn, eenvoudig van „het raakpunt A of B" te spreken.

Een aaneenschakeling van punten van het oppervlak, zoodanig, dat elk punt van een voorafgaand en een volgend sluit (uitgenomen het eerste en het laatste punt, die slechts aan één ander punt sluiten), wordt een lijn op het oppervlak genoemd.

Een snijlijn van zulk een lijn, die dus weder twee willekeurige harer punten verbindt, is dan tevens snijlijn van het oppervlak en evenzoo zal een rechte, die twee opeenvolgende punten der kromme verbindt, en daarom de kromme raakt, tevens raaklijn aan het oppervlak zijn. Hierdoor hebben wij de eigenschap verkregen:

Eigenschap 429. *Elke raaklijn aan een kromme op een oppervlak in een bepaald punt, raakt het oppervlak in dat zelfde punt.*

Ligt een rechte op een oppervlak, en beschouwt men haar nu als

verbindingslijn van twee willekeurige harer punten, dan moet die rechte dus ook tevens snijlijn van het oppervlak beschouwd worden. Beschouwt men echter de rechte als verbindingslijn van twee opeenvolgende harer punten, dan blijkt, dat zij tevens een raaklijn aan het oppervlak is. Wij komen dus tot:

Eigenschap 430. ***Een rechte, die geheel op een oppervlak ligt, is raaklijn aan het oppervlak in elk harer punten.***

229. Onder de oppervlakken nemen die een belangrijke plaats in, welke uit rechte lijnen opgebouwd kunnen worden.

Allereerst behooren hiertoe de cylindervlakken.

Een cylindervlak is de meetkundige plaats van alle rechten, die evenwijdig aan een gegeven rechte loopen en een gegeven willekeurige kromme snijden.

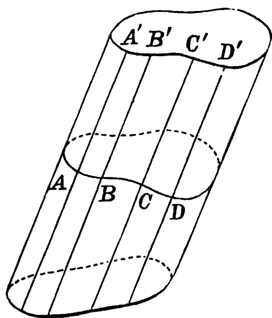


Fig. 428.

De willekeurige kromme wordt de richtlijn genoemd, terwijl de door alle punten daarvan getrokken rechten, die het oppervlak samenstellen, beschrijvende lijnen heeten.

In fig. 428 is b.v. ABCD... de richtlijn, terwijl AA′, BB′, enz. beschrijvende lijnen zijn.

Is de richtlijn een cirkel, dan heet het cylindervlak cirkelvormig, en indien bovendien de beschrijvende rechten loodrecht staan op het vlak van dien cirkel, dan wordt het cylindervlak recht cirkelvormig genoemd.

Wordt bij een cirkelvormig cylindervlak door het middelpunt der richtlijn een rechte getrokken, die evenwijdig loopt met de beschrijvende rechten, dan wordt deze de as van het cylindervlak genoemd.

230. Snijdt men een cylindervlak door een willekeurig plat vlak, dat niet evenwijdig met de beschrijvende rechten loopt, dan is de doorsnede een kromme, die als een nieuwe richtlijn beschouwd kan worden. Nu kan men echter deze vlakke kromme als de grens beschouwen, waartoe een willekeurige daarin beschreven vlakke veelhoek bij voortdurende aangroeiing van het aantal zijden nadert. Denkt men dus door elk hoekpunt van dien veelhoek een rechte getrokken, evenwijdig aan de beschrijvende rechten van den cylinder, dan ontstaat het zijdelingsch oppervlak van een prisma, dat aan beide zijden tot in het oneindige verlengd gedacht is, en dit oppervlak zal, bij toename van het aantal zijden van dien veelhoek, hoe langer hoe meer tot het cylindervlak naderen.

Deze beschouwing van het cylindervlak als de grens van een oneindig uitgestrekt prisma voert ons gemakkelijk tot een paar eigenschappen:

Eigenschap 431. ***Evenwijdige doorsneden van een cylindervlak met vlakken, die niet evenwijdig loopen met de beschrijvende rechten, zijn congruent.***

Bewijs: Volgens N⁰ 383 geldt deze eigenschap namelijk voor elk prisma en aangezien het cylindervlak beschouwd kan worden als de grens, waartoe een oneindig uitgestrekt prisma nadert, moet zij dus ook voor het cylindervlak waar zijn.

Een gevolg van deze stelling is:

Eigenschap 432. ***In elken cirkelvormigen cylinder zijn de doorsneden met vlakken, die evenwijdig met het vlak van de richtlijn loopen, gelijke cirkels.***

Wij gaan nu over tot

Eigenschap 433. ***Een vlak, dat evenwijdig is met de beschrijvende rechten van een cylindervlak, heeft zoovele beschrijvende rechten met het oppervlak gemeen, als het aantal snijpunten van dat vlak met de richtlijn bedraagt.***

Bewijs: Zij A B de richtlijn en A A′ een beschrijvende rechte, terwijl het vlak U || A A′ loopt. Is nu P een snijpunt van de richtlijn met U en trekt men door P een rechte P P′ || A A′, dan moet deze volgens N⁰ 324 in U liggen. Maar P P′ is ook een beschrijvende rechte van het cylindervlak, dus is P P′ aan het cylindervlak en vlak U gemeen. Dezelfde redeneering blijft geldig voor elk ander snijpunt Q . . . van de richtlijn met het vlak U, dus zijn al de beschrijvenden, die door de snijpunten van A B en het vlak U gaan, aan dit vlak en het cylindervlak gemeen.

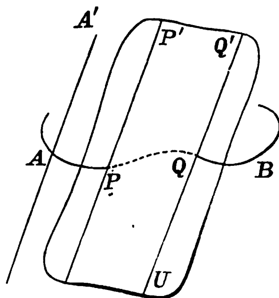


Fig. 429.

Onderstelt men nu, dat deze beide nog een punt S buiten al die beschrijvenden gemeen hadden, dan zou men, evenals hierboven voor P P′ kunnen bewijzen, dat nu ook de beschrijvende rechte S S′ aan U en het cylindervlak gemeen moest zijn. Maar dan zou dus ook het snijpunt van S S′ met de richtkromme, aan het vlak U en het cylindervlak gemeen zijn, d. w. z. het snijpunt van S S′ met de richtkromme zou in U moeten liggen, hetgeen tegen onze onderstelling strijdt.

Eigenschap 434. ***Een cirkelvormig cylindervlak wordt door een vlak, dat evenwijdig loopt met de beschrijvende rechten, in hoogstens twee beschrijvenden gesneden.***

Bewijs: Om het aantal beschrijvende rechten te bepalen, dat het snijvlak U met het cylindervlak gemeen heeft, moet men volgens N° 433 het aantal snijpunten van dat snijvlak met de richtlijn bepalen.

Elk snijpunt van U met dien cirkel moet liggen in U en in het vlak van den cirkel, derhalve moet zulk een snijpunt ook liggen in de snijlijn A B dier vlakken, en daar A B hoogstens twee punten met den cirkel gemeen heeft, hebben het vlak U en het cylindervlak dus ook hoogstens twee beschrijvende rechten gemeen.

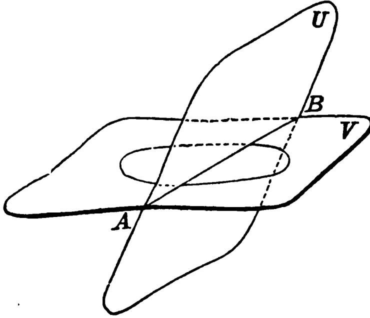


Fig. 430.

231. Wanneer een vlak twee opeenvolgende beschrijvende rechten met een cylindervlak gemeen heeft, noemt men het een raakvlak aan het oppervlak. Men kan zich ook denken, dat een raakvlak de grens is, waartoe een snijvlak, dat evenwijdig met de beschrijvende rechten loopt, nadert, als men dit snijvlak om een zijner snijlijnen met het cylindervlak laat draaien, totdat een tweede zijner snijlijnen naast die eerste is komen te liggen.

Elk der twee opeenvolgende beschrijvende rechten, die men gewoonlijk weder als volkomen samenvallend beschouwt, noemt men de contactribbe van het raakvlak met het cylindervak.

Eigenschap 435. *Een raakvlak aan een cylindervlak bevat de raaklijn aan de richtlijn in het punt, waar deze laatste door de contactribbe gesneden wordt.*

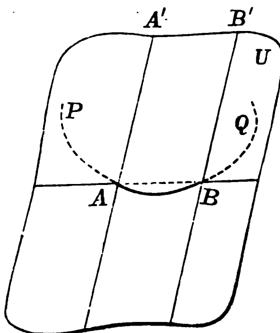


Fig. 431.

Bewijs: Zij P Q de richtlijn en U een snijvlak, dat twee willekeurige beschrijvenden A A′ en B B′ met het cylindervlak gemeen heeft, dan zal U de verbindingslijn der punten A en B, d. i. de snijlijn A B van de richtlijn, geheel bevatten. Laat men nu het vlak U om A A′ draaien, zoodat B B′ tot A A′ nadert, dan gaat U in een raakvlak over en te gelijk gaat de rechte A B, die voortdurend in het vlak U gebleven is, in een raaklijn aan de richtlijn over.

Eigenschap 436. *Bij een recht cirkelvormig cylindervlak staat een raakvlak loodrecht op het vlak, dat door de contactribbe en de as van het cylindervlak gaat.*

Bewijs: Zij M het middelpunt der cirkelvormige richtlijn, M M′ de as, A A′ de contactribbe van het raakvlak U, A het punt, waar deze de richtlijn ontmoet.

Volgens N⁰ 435 zal nu de raaklijn A R aan de richtlijn in het vlak U liggen. Maar M A ⊥ A R en M M′ ⊥ A R, dus is A R ⊥ het vlak M′ M A A′ en volgens N⁰ 339 zal dan ieder vlak, dat door A A′ gaat, dus ook het raakvlak U, ⊥ op het vlak M′ M A A′ staan.

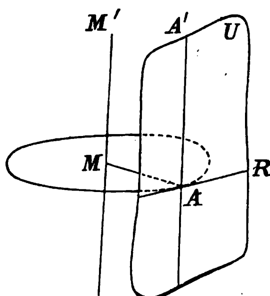


Fig. 432.

232. Snijdt men een cylindervlak door twee evenwijdige platte vlakken, dan ontstaat een volkomen begrensd deel der ruimte, dat **cylinder** heet. Die snijvlakken worden **grond-** en **bovenvlak** genoemd; hun afstand heet de **hoogte van den cylinder.**

Uit het begin van § 230 is nu onmiddellijk duidelijk:

Eigenschap 437. *Een cylinder is de grens, waartoe een willekeurig prisma, welks grondvlak in een kromme beschreven is, nadert, als men het aantal zijden van dat grondvlak voortdurend laat toenemen.*

De formules, die voor het zijdelingsch oppervlak en voor den inhoud van een prisma gelden, zullen derhalve evenzeer voor die grootheden bij een cylinder geldig blijven. Daardoor verkrijgen wij de volgende eigenschappen:

Eigenschap 438. *Het zijdelingsche of gebogen oppervlak van een cylinder is gelijk aan het product van den omtrek der loodrechte doorsnede met de lengte der beschrijvende rechte.* (N⁰ 374.)

Is de cylinder recht en cirkelvormig en duidt men den straal van het grondvlak met r, den afstand van grond- en bovenvlak, d. i. dus ook de lengte der beschrijvende rechte met h aan, dan is

$$\text{het zijdelingsch oppervlak} = 2 \pi r h.$$

Eigenschap 439. *De inhoud van een cylinder is gelijk aan het product van het grondvlak en de hoogte.* (N⁰ 418.)

Is de cylinder cirkelvormig, dan is dus

$$\text{de inhoud} = \pi r^2 h.$$

Eindelijk geldt nog

Eigenschap 440. *De inhoud van een cylinder is gelijk aan het product van de loodrechte doorsnede met de lengte der beschrijvende rechte* (N⁰ 427.)

233. Een tweede soort van oppervlakken, die uit rechten opgebouwd zijn, wordt gevormd door de kegelvlakken.

Een kegelvlak is de meetkundige plaats van de rechten, die door een gegeven punt gaan en een gegeven kromme snijden.

Het gegeven punt heet de top van het kegelvlak, de gegeven kromme heet richtlijn, terwijl de rechten, die het oppervlak samenstellen, de beschrijvende rechten genoemd worden.

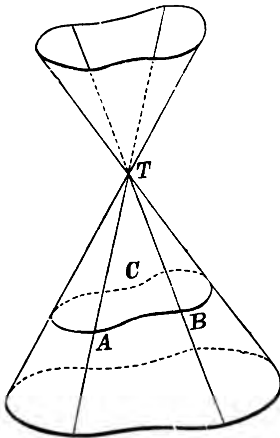


Fig. 433.

Daar deze rechten zich naar beide zijden tot in het oneindige uitstrekken, bestaat een kegel uit twee volkomen gelijke deelen, die in den top samenkomen. Men geeft daarom aan den top ook wel den naam middelpunt van het kegelvlak.

In fig. 433 is ABC de richtlijn, T de top, TA, TB... zijn beschrijvenden.

Is de richtlijn een cirkel, dan heet het kegelvlak cirkelvormig en als bovendien de rechte, die den top met het middelpunt van de richtlijn verbindt, loodrecht op het vlak van dien cirkel staat, dan is het kegelvlak recht cirkelvormig.

De zooeven genoemde verbindingslijn van den top met het middelpunt van de cirkelvormige richtlijn, wordt bij elk cirkelvormig kegelvlak de as van het oppervlak genoemd.

234. **Eigenschap 441.** *De beschrijvende rechten van een recht cirkelvormig kegelvlak vormen met de as gelijke hoeken.*

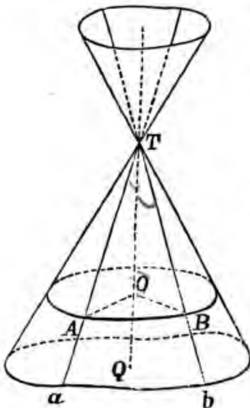


Fig. 434.

Bewijs: Zij cirkel O de richtlijn, waarvan twee willekeurige punten A en B met O en met T verbonden worden, dan is

$$\triangle TOA \cong \triangle TOB,$$

omdat zij TO gemeen hebben en bovendien

$$OA = OB, \angle TOA = \angle TOB = 1R$$

is. Dus is

$$\angle ATO = \angle BTO.$$

zooals bewezen moest worden.

Omgekeerd geldt ook:

Eigenschap 442. *De meetkundige plaats der rechten, die door één punt gaan en met een gegeven, door dat punt gaande rechte, gelijke hoeken vormen, is een recht cirkelvormig kegelvlak.*

Bewijs: (fig. 434). Zij namelijk T Q de gegeven rechte en stellen wij, dat T *a*, T *b* enz. gelijke hoeken daarmede maken. Brengt men nu in een willekeurig punt O van T Q een vlak aan ⊥ T Q, dat de rechten T *a*, T *b* ... in A, B, enz. snijdt, dan ontstaan door vereeniging van A, B, ... met O congruente driehoeken T O A, T O B ..., want

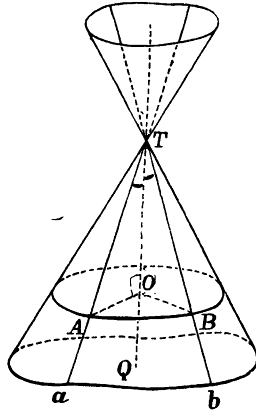


Fig. 434.

T O = T O,

∟ T O A = ∟ T O B = 1 R,

∟ A T O = ∟ B T O,

derhalve O A = O B = ... Daar nu O een vast punt is en O A, O B ... alle in hetzelfde vlak liggen en gelijk zijn, zoo liggen A, B, ... op een cirkel in dat vlak en de rechten T *a*, T *b* ... zijn dus beschrijvende rechten van een kegel, waarvan die cirkel de richtlijn is, terwijl de as T O ⊥ is op het vlak der richtlijn. Die kegel is dus een rechte cirkelvormige.

235. Snijdt men een kegelvlak door een willekeurig plat vlak, dan is de doorsnede een kromme, die als een nieuwe richtlijn kan beschouwd worden.

Denkt men in deze kromme een willekeurigen veelhoek beschreven en verbindt men de hoekpunten van dezen veelhoek met den top, welke ter weerszijden oneindig ver verlengd gedacht worden, dan ontstaat een veelvlakshoek met zijn tegengestelde figuur, die bij toename van het aantal zijden van den veelhoek voortdurend meer tot het kegelvlak naderen.

Denkt men zich de verbindingslijnen van den top met de hoekpunten van den veelhoek niet verlengd, dan is het zijdelingsch oppervlak van een veelzijdige pyramide ontstaan. Ten gevolge van N° 388 kan men nu onmiddellijk besluiten:

Eigenschap 443. *Twee evenwijdige doorsneden van een kegelvlak zijn gelijkvormige figuren.*

Een gevolg van deze stelling is:

Eigenschap 444. *Snijdt men een cirkelvormig kegelvlak door platte vlakken, die evenwijdig loopen met het vlak der richtlijn, dan zijn de doorsneden cirkels.*

Wij gaan nu over tot de doorsneden van een kegelvlak met een plat vlak, dat door den top gaat.

Eigenschap 445. *Een vlak, dat door den top van een kegelvlak gaat, heeft zooveel beschrijvende rechten met het kegelvlak gemeen, als het aantal snijpunten van de richtlijn met het vlak bedraagt.*

Bewijs: Snijdt namelijk een vlak U, dat den kegeltop T bevat, de richtkromme P Q in A, en verbindt men A met T, dan is deze rechte een beschrijvende lijn van het kegelvlak, terwijl zij tevens in U moet liggen, omdat twee harer punten in U gelegen zijn. Het vlak U en het kegelvlak hebben dus de beschrijvende rechte T A gemeen, en hetzelfde geldt van elke andere beschrijvende rechte, die door een snijpunt van de kromme C D met het vlak U gaat.

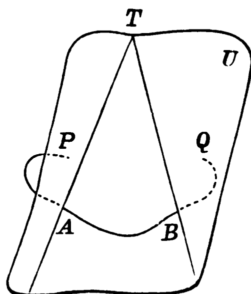


Fig. 435.

Onderstelt men nu, dat het vlak U met het kegelvlak nog eenig punt S gemeen had, dat niet ligt op een der beschrijvenden, door de snijpunten van het vlak U met de richtkromme getrokken, dan zou men, evenals hierboven voor A T, kunnen bewijzen, dat de beschrijvende rechte T S, en dus ook het snijpunt van T S met de richtkromme, aan het vlak U en het kegelvlak gemeen moest zijn, d. w. z. het snijpunt van T S met de richtkromme zou in U moeten liggen, hetgeen tegen onze onderstelling strijdt.

Eigenschap 446. *Een vlak, dat door den top van een cirkelvormig kegelvlak gaat, heeft hoogstens twee beschrijvende rechten met het kegelvlak gemeen.*

Deze stelling volgt onmiddellijk uit de vorige, in verband met de in N⁰ 434 bewezen eigenschap, dat een plat vlak, dat een cirkel snijdt, hoogstens twee punten daarmede gemeen heeft.

*236. Een der merkwaardigste eigenschappen van het cirkelvormig kegelvlak is, dat er behalve de zooeven genoemde reeks van cirkelvormige doorsneden nog een tweede reeks van zoodanige doorsneden aanwezig is.

Om hiertoe te geraken, vermelden wij allereerst, dat het vlak, dat door de as van het kegelvlak loodrecht op het grondvlak wordt gebracht, het h o o f d v l a k van den k e g e l genoemd wordt. Dit vlak snijde het kegelvlak volgens twee beschrijvende rechten T A en T B in fig. 436.

Trekt men nu in $\triangle$ T A B een rechte C D antiparallel met A B, zoodat

$$\angle TDC = \angle TAB, \text{ en } \angle TCD = \angle TBA,$$

en brengt men nu door C D een vlak aan, dat loodrecht op het hoofdvlak staat, dan wordt de doorsnede van dit vlak C D met het kegelvlak de tegengestelde doorsnede genoemd. Op de volgende wijze kan nu worden aangetoond, dat deze tegengestelde doorsnede een cirkel is.

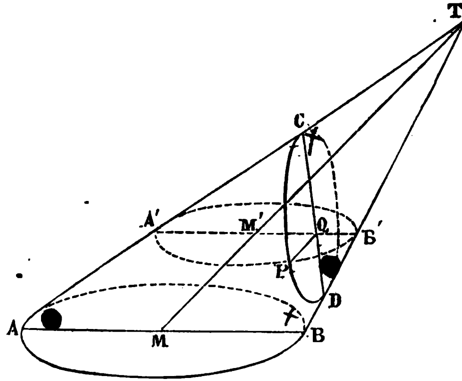


Fig. 436.

Nemen wij in die doorsnede een willekeurig punt P en brengen door dit punt een vlak A′ B′ evenwijdig aan het grondvlak, dan zal de lijn P Q, volgens welke de vlakken C D en A′ B′, die beide loodrecht op het hoofdvlak staan, elkander snijden, ook loodrecht staan op het hoofdvlak. Omdat de doorsnede A′ B′ een cirkel is, heeft men de eigenschap

$$PQ^2 = A'Q \times B'Q.$$

Maar de drieboeken A′ Q C en B′ Q D zijn gelijkvormig, omdat volgens de onderstelling ∟ A′ = ∟ D en ∟ C = ∟ B′; hieruit volgt de evenredigheid

$$A'Q : DQ = CQ : B'Q.$$

of

$$A'Q \times B'Q = DQ \times CQ;$$

derhalve

$$PQ^2 = CQ \times DQ.$$

Hieruit blijkt, dat het punt P van de doorsnede behoort tot een cirkel, die op de lijn C D als middellijn is beschreven; en daar dit punt willekeurig in de doorsnede is genomen, kan hetzelfde van al hare punten worden aangetoond, waaruit volgt, dat die doorsnede zelve een cirkel is.

Wegens de gelijkvormigheid van alle evenwijdige doorsneden, geeft elk vlak evenwijdig aan C D op het kegelvlak een cirkel tot snijkromme.

Wij hebben dus verkregen:

Eigenschap 447. *Een cirkelvormig kegelvlak heeft twee rijen cirkelvormige doorsneden; de eene rij is evenwijdig aan het grondvlak, de tweede evenwijdig aan de tegengestelde doorsnede.*

237. Wanneer een vlak twee opeenvolgende beschrijvende rechten met een kegelvlak gemeen heeft, noemt men het een raakvlak aan het oppervlak.

Men kan zich dan ook denken, dat een raakvlak de grens is, waartoe een snijvlak van het kegelvlak, dat den top bevat, nadert, indien men dit snijvlak om een zijner snijlijnen met het kegelvlak laat draaien, tot de tweede snijlijn onmiddellijk naast de eerste komt te liggen.

Elk der twee opeenvolgende beschrijvende rechten, die in het raakvlak liggen, noemt men de contactribbe.

Eigenschap 448. *Een raakvlak aan een kegelvlak bevat de raaklijn aan de richtlijn in het punt, waar deze laatste door de contactribbe gesneden wordt.*

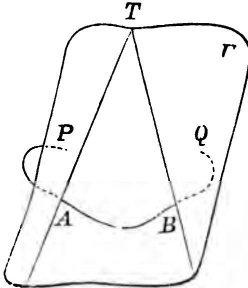


Fig. 435.

Bewijs: Zij in fig. 435 P Q de richtlijn en U een snijvlak door den top, dat twee willekeurige beschrijvende rechten A T en B T met het kegelvlak gemeen heeft, dan zal U de snijlijn A B van de richtlijn geheel bevatten. Laat men nu het vlak U om A T draaien, zoodat B T tot A T nadert, dan gaat U in een raakvlak over, maar dit vlak blijft daarbij voortdurend de rechte A B, die evenzeer tot een raaklijn aan de richtkromme nadert, bevatten.

Eigenschap 449. *Bij een recht cirkelvormig kegelvlak staat een raakvlak loodrecht op het vlak, dat door de contactribbe en de as van het kegelvlak gebracht wordt.*

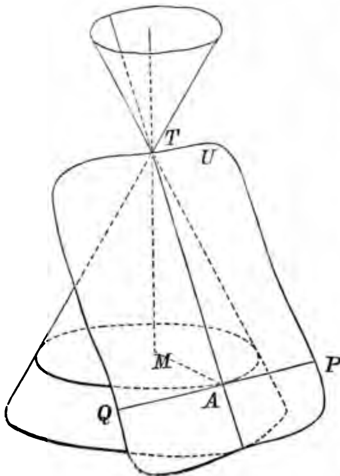


Fig. 437.

Bewijs: Zij M het middelpunt van de richtlijn, dus M T de as, T A de contactribbe, die de richtlijn in A snijdt, dan zal het raakvlak U volgens N° 448 de raaklijn A P in A aan den richtcirkel bevatten. Nu is echter

$$TM \perp AP \text{ en } MA \perp AP,$$

derhalve

$$AP \perp \text{het vlak } MTA,$$

zoodat het vlak U, dat A P bevat, volgens N° 339 loodrecht op het vlak M T A zijn moet.

238. Snijdt men een kegelvlak door een plat vlak, dat alle beschrijvende rechten aan dezelfde zijde van den top snijdt, dan ontstaat een lichaam, dat kegel genoemd wordt. Ook

spreekt men van een cirkelvormigen en van een rechten cirkelvormigen kegel. Het snijvlak wordt het grondvlak van den kegel genoemd.

Uit het begin van § 235 is nu duidelijk:

Eigenschap 450. *Een kegel is de grens, waartoe een pyramide nadert, welker grondvlak in een kromme beschreven is, indien men het aantal zijden van dat grondvlak voortdurend laat toenemen.*

In het bijzonder zal men een rechten cirkelvormigen kegel kunnen beschouwen als de grens, waartoe een regelmatige pyramide nadert, wanneer men het aantal zijden van haar grondvlak, dat in een cirkel beschreven gedacht wordt, voortdurend laat toenemen. Hierbij verdient opmerking, dat het apothema van de regelmatige pyramide bij de grens in de beschrijvende rechte van den rechten cirkelvormigen kegel overgaat, waarom men deze beschrijvende ook apothema van den kegel noemt. Dezelfde rechte heet ook wel de schuine zijde.

De formules, die voor het zijdelingsche oppervlak en voor den inhoud van een pyramide zijn afgeleid, kunnen dus onmiddellijk op dezelfde grootheden bij een kegel toegepast worden. Hierdoor verkrijgen wij uit N° 391:

Eigenschap 451. *Het zijdelingsche oppervlak van een rechten cirkelvormigen kegel is gelijk aan het halve product van het apothema met den omtrek van het grondvlak.*

Duidt men den straal van het grondvlak van den kegel met r en het apothema of de schuine zijde met s aan, dan is dus

$$\text{het zijdelingsche oppervlak} = \tfrac{1}{2}\, s \times 2\,\pi\, r = \pi\, r\, s.$$

Evenzoo volgt uit N° 423, als men onder de hoogte van een kegel de loodlijn, uit den top op het grondvlak neergelaten, verstaat:

Eigenschap 452. *De inhoud van elken kegel is gelijk aan het derde deel van het product van grondvlak en hoogte.*

Voor den cirkelvormigen kegel, welks grondvlak r tot straal heeft, terwijl de hoogte h bedraagt, is dus

$$\text{de inhoud} = \tfrac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h.$$

239. Op dezelfde wijze, waarop een afgeknotte pyramide uit een pyramide verkregen wordt, kan men uit een kegel een afgeknotten kegel doen ontstaan. Men spreekt hierbij dan van het grond- en het bovenvlak en noemt den afstand tusschen deze vlakken de hoogte.

Het is duidelijk, dat men een afgeknotten kegel kan beschouwen als de grens, waartoe een afgeknotte pyramide nadert, als men het aantal zijden van grond- en bovenvlak voortdurend laat toenemen.

In het bijzonder ontstaat op deze wijze uit een regelmatige afgeknotte pyramide een afgeknotte rechte cirkelvormige kegel, welks beschrijvende rechte de grens is, waartoe het apothema van de regelmatige afgeknotte pyramide nadert. Die beschrijvende rechte heet daarom ook hier apothema.

Uit N⁰ 393 volgt nu onmiddellijk:

Eigenschap 453. *Het zijdelingsche oppervlak van een afgeknotten rechten cirkelvormigen kegel is gelijk aan het halve product van het apothema met de som der omtrekken van grond- en bovenvlak.*

Duidt men de stralen van het grond- en het bovenvlak met R en r, het apothema of de schuine zijde met s aan, dan is dus

$$\text{het zijdelingsche oppervlak} = \tfrac{1}{2}\, s\,(2\pi R + 2\pi r) = \pi s\,(R + r).$$

Evenzoo volgt uit N⁰ 424

Eigenschap 454. *De inhoud van elken afgeknotten kegel is gelijk aan het derde deel van de hoogte, vermenigvuldigd met de som der oppervlakken van het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat middenevenredig is tusschen deze beide vlakken.*

In het bijzonder is voor een afgeknotten cirkelvormigen kegel, waarbij R en r de stralen van grond- en bovenvlak voorstellen, terwijl h de hoogte is,

$$G = \pi R^2,\ B = \pi r^2,$$

dus

$$\sqrt{G B} = \pi R r,$$

en hieruit volgt dan

$$\text{de inhoud} = \tfrac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + R r).$$

240. Ten slotte zij de aandacht erop gevestigd, dat een cylindervlak kan beschouwd worden als een kegelvlak, waarvan de top zich naar het oneindige verwijderd heeft. Hierin ligt de oorzaak, dat alle eigenschappen van deze vlakken zoo groote overeenstemming vertoonen.

In het bijzonder wijzen wij er op, dat N⁰ 447 evenzeer op een cirkelvormig cylindervlak als op een zoodanig kegelvlak toepasselijk is, zoals men gemakkelijk inziet, daar het medegedeelde bewijs met geringe wijziging op een cirkelvormig cylindervlak overgebracht kan worden.

Vraagstukken.

925. De meetkundige plaats der punten, die op gelijken afstand van een gegeven rechte verwijderd zijn, is een recht cirkelvormig cylindervlak.

926. Door een willekeurig punt buiten een recht cirkelvormig cylindervlak kunnen steeds twee, maar ook niet meer dan twee, raakvlakken aan het oppervlak gebracht worden.

927. Door een willekeurige rechte kan in het algemeen geen raakvlak aan een cylindervlak gebracht worden.

928. Bewijs het omgekeerde van N⁰ 436.

929. De hoek tusschen twee raakvlakken aan een recht cirkelvormig cylindervlak wordt middendoor gedeeld door het vlak, dat door hunne snijlijn en de as gebracht wordt.

930. Een rechte, die de as van een cirkelvormig cylindervlak snijdt, en in dat oppervlak eindigt, wordt door de as middendoor gedeeld.

931. Een rechthoek, waarvan de zijden 7 en 9 cM. zijn, wentelt eerst om de eene en daarna om de andere zijde. Bepaal de verhouding van de oppervlakken en ook van de inhouden der beide omwentelingslichamen.

932. Als het geheele oppervlak van een rechten cirkelvormigen cylinder 7,58 dM^2. is en de hoogte 1 dM. bedraagt, hoe groot is dan de inhoud?

933. Bepaal den inhoud en het oppervlak van den cirkelvormigen cylinder, die om een regelmatig achtzijdig prisma beschreven kan worden, als de zijde van het grondvlak 4 cM. en de hoogte 1 dM. bedraagt.

934. Bepaal den inhoud en het geheele oppervlak van de ringvormige figuur, die ontstaat door de wenteling van een rechthoek om een in zijn vlak gelegen rechte, die evenwijdig aan een der zijden van den rechthoek loopt en het andere paar niet snijdt.

935. De oppervlakken van twee gelijkvormige rechte cirkelvormige cylinders verhouden zich als de vierkanten, de inhouden als de derde machten van gelijkstandige rechten. (Men noemt twee zoodanige cylinders gelijkvormig, als de hoogten evenredig zijn met de stralen van de grondvlakken.)

936. Door een willekeurig punt gaan twee raakvlakken aan een cirkelvormig kegelvlak.

937. Bewijs, dat door een willekeurige rechte in het algemeen geen raakvlak aan een kegelvlak gebracht kan worden.

938. Door toepassing van N⁰ 448 een constructie aan te geven voor een raakvlak aan een kegelvlak, als het raakvlak door een gegeven punt gaan moet.

939. Hoe wijzigt zich de constructie van het vorige werkstuk voor een cylindervlak?

940. Bewijs het omgekeerde van N° 449.

941. De hoek tusschen twee raakvlakken aan een recht cirkelvormig kegelvlak wordt gehalveerd door het vlak, dat door hunne snijlijn en de as gebracht wordt.

942. Een driehoek, waarvan de zijden 13, 14 en 15 cM. zijn en waarin de hoogtelijn op de zijde van 14 cM. getrokken is, wentelt om deze zijde. Bepaal den inhoud en het oppervlak van het ontstane omwentelingslichaam.

943. Als een doorsnede, door de as van een rechten cirkelvormigen kegel gebracht, een tophoek van 36° en opstaande zijden van 6 dM. heeft, hoe groot zijn dan het oppervlak en de inhoud van dien kegel?

944. Om een regelmatige zeszijdige pyramide, waarvan het geheele grondvlak $6(4+\sqrt{3})$ cM. bedraagt, terwijl het apothema van een der zijvlakken het dubbele is van de zijde van het grondvlak, wordt een kegel beschreven. Bepaal het oppervlak en den inhoud van dien kegel.

945. De oppervlakken van twee gelijkvormige rechte cirkelvormige kegels verhouden zich als de vierkanten, de inhouden als de derde machten van gelijkstandige rechten. (Vergelijk het bij N° 935 gevoegde.)

946. Hoe groot is het ronde oppervlak en de inhoud van een afgeknotten kegel, die van een rechten cirkelvormigen kegel (straal grondvlak = 3, hoogte = 8 cM.) wordt afgesneden door een vlak, dat op een afstand van 2 cM. van den top van dien kegel aangebracht wordt?

947. Om en in de asdoorsnede van een afgeknotten kegel kan een cirkel beschreven worden. Als de evenwijdige zijden dier doorsnede *a* en *b* zijn, hoe groot zijn dan het oppervlak en de inhoud van dien afgeknotten kegel?

948. Een rechthoekig trapezium, waarvan de rechthoekszijde 3 cM. is, terwijl de evenwijdige zijden 5 en 9 cM. bedragen, wentelt om de schuine zijde. Bepaal het oppervlak en den inhoud van het ontstane omwentelingslichaam.

HOOFDSTUK XLIII.

DE BOL.

241. Onder de overige gebogen oppervlakken, welker eigenschappen zich op eenvoudige wijze laten afleiden, wordt wel de belangrijkste plaats ingenomen door den bol.

Een bol is de meetkundige plaats der punten, die gelijken afstand hebben tot één punt. Dit punt wordt het middelpunt genoemd.

Elke rechte, die het middelpunt met een punt van den bol verbindt, heet straal.

Een rechte, die twee punten van den bol met elkander verbindt, heet koorde en een koorde, die door het middelpunt gaat, heet middellijn.

Volgens de definitie van den bol geldt:

Eigenschap 455. *Alle stralen van een bol zijn gelijk.*

Omdat elke middellijn uit twee stralen bestaat, zullen dus ook alle middellijnen van een bol gelijk zijn.

Twee punten van een bol, die op één middellijn liggen, heeten elkanders tegenpunten.

242. Ten einde de doorsnijding van een bol met een plat vlak te onderzoeken, kan men denzelfden weg kiezen, dien wij in de planimetrie bij de snijding van een cirkel met een rechte gevolgd hebben. Daartoe is het dan noodig te voren de volgende eigenschappen te bewijzen:

Eigenschap 456. *De loodlijn, uit een punt op een vlak neergelaten, is korter dan elke schuine lijn, die dat punt met een punt van het vlak verbindt.*

Voor het bewijs is alleen noodig het voetpunt van de loodlijn met dat van de schuine lijn te verbinden, waardoor een rechthoekige driehoek ontstaat, die de schuine lijn tot hypothenusa, de loodlijn tot rechthoekszijde heeft.

Evenzoo bewijst men gemakkelijk:

Eigenschap 457. *Twee schuine lijnen, uit een punt naar een vlak getrokken, zijn gelijk, als hare voetpunten even ver liggen van het voetpunt der loodlijn, uit dat punt op het vlak neergelaten, en omgekeerd, als twee schuine lijnen gelijk zijn, dan liggen hare voetpunten op gelijken afstand van het voetpunt der loodlijn.*

Eigenschap 458. *Een schuine lijn, uit een punt naar een vlak getrokken, wordt langer, als haar voetpunt zich verder van het voetpunt der loodlijn verwijdert en omgekeerd, als twee schuine lijnen ongelijk zijn, dan ligt het voetpunt van de langste schuine lijn verder van het voetpunt der loodlijn verwijderd dan het voetpunt van de kortste schuine lijn.*

Wij voegen hieraan nog een belangrijke eigenschap toe, die met de vorige eigenschappen in nauw verband staat:

Eigenschap 459. *De meetkundige plaats van de rechten, die uit één punt naar een plat vlak getrokken worden en gelijke lengte hebben, is een rechte cirkelvormige kegel, waarvan de loodlijn, uit dat punt op het vlak neergelaten, de as is.*

Bewijs: Zij namelijk P het punt, M het voetpunt der loodlijn uit P op het vlak U en A B C een cirkel, om M in het vlak U beschreven, dan is volgens N⁰ 457

P A = P B = P C = enz.,

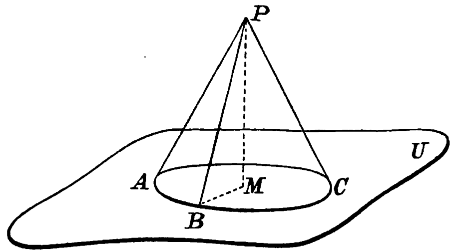


Fig. 438.

terwijl volgens N⁰ 458 elke rechte, die P met een niet op den cirkel M gelegen punt verbindt, ook niet gelijk is aan P A.

Bij het vorige sluiten zich nu de volgende eigenschappen aan:

Eigenschap 460. *Als de afstand van het middelpunt van een bol tot een plat vlak grooter is dan de straal, dan hebben dat platte vlak en die bol geen enkel punt gemeen.*

Eigenschap 461. *Als de afstand van het middelpunt van een bol tot een plat vlak gelijk is aan den straal, dan heeft het platte vlak met den bol één punt gemeen.*

Eigenschap 462. *Als de afstand van het middelpunt van een bol tot een plat vlak kleiner is dan de straal, dan heeft het platte vlak met den bol een cirkel gemeen, waarvan het middelpunt ligt in het voetpunt der loodlijn, uit het middelpunt van den bol op het platte vlak neergelaten.*

Wij geven hier slechts het bewijs van de laatste stelling:

Gegeven: de bol M en het vlak U. O is het voetpunt der loodlijn, uit M op U neergelaten. $MO <$ den straal r.

Te bewijzen: het vlak U en de bol hebben een cirkel gemeen.

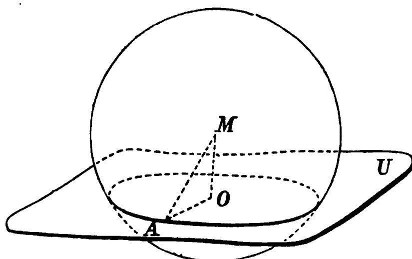


Fig. 439.

Bewijs: Volgens het gegevene ligt O niet op den bol. Wanneer men nu uit M alle mogelijke schuine rechten naar het vlak U getrokken denkt, dan zullen deze volgens N⁰ 458 grooter worden, naarmate hare voetpunten verder van O verwijderd zijn en daar $MO < r$ is, moeten er dus ook schuine lijnen zijn, die gelijk aan r zijn, welker voetpunten dan op den bol en in U liggen, dus tot de snijlijn van den bol met U behooren. Maar volgens N⁰ 457 liggen de voetpunten dier schuine lijnen alle even ver van O, dus op een cirkel om O beschreven. Deze cirkel is dus de snijlijn van den bol en het vlak.

Stelt men den straal van den bol door R, den afstand MO door a en den straal van de doorsnede door r voor, dan volgt uit den rechthoekigen driehoek MOA onmiddellijk

$$r^2 = R^2 - a^2,$$

zoodat de straal van den cirkel, die de doorsnede vormt, kleiner wordt, naarmate het snijvlak verder van het middelpunt van den bol verwijderd is.

Men ziet onmiddellijk in, dat een vlak, dat door het middelpunt van den bol gaat, dezen snijdt volgens een cirkel, waarvan de straal gelijk is aan dien van den bol.

De doorsnede van een bol met een vlak, dat door het middelpunt gaat, wordt een groote cirkel op den bol genoemd, terwijl de doorsnede van den bol met elk ander vlak een kleine cirkel heet.

De straal van een kleinen cirkel is tusschen de grenzen R en nul gelegen.

Eigenschap 463. *Een groote cirkel is door twee punten van den bol bepaald.*

Bewijs: Deze twee punten en het middelpunt bepalen namelijk het vlak, waarin de cirkel liggen moet.

De boog van den grooten cirkel, die twee punten op den bol

verbindt, wordt de sphaerische afstand dier punten genoemd.

Eigenschap 464. *Door drie willekeurige punten op een bol is een kleine cirkel bepaald.*

Bewijs: Deze kleine cirkel is namelijk de doorsnede van den bol met het vlak, dat door de drie gegeven punten gaat.

Eigenschap 465. *Twee groote cirkels op een bol hebben steeds twee punten gemeen, die op een middellijn liggen.*

Bewijs: Daar de vlakken dier groote cirkels beide door het middelpunt gaan, hebben zij in elk geval één punt, dus volgens N° 301 een rechte gemeen en deze rechte is een middellijn van den bol. De uiteinden dezer middellijn moeten dan op de beide groote cirkels liggen.

243. De rechte, die in het middelpunt van een cirkel loodrecht op zijn vlak wordt opgericht, heet de as van den cirkel.

Eigenschap 466. *De as van een kleinen cirkel op een bol is de rechte, die het middelpunt van den cirkel met dat van den bol verbindt.*

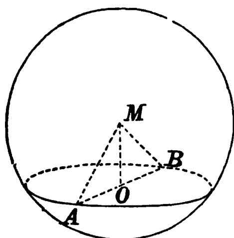


Fig. 440.

Bewijs: Denkt men namelijk het middelpunt O van den cirkel met M verbonden en brengt men een willekeurig vlak door M O, dat het vlak van den cirkel O volgens A B snijdt, dan is $\triangle$ M A B gelijkbeenig en omdat $AO = OB$, is dus $MO \perp AB$. M O is dus loodrecht op elke rechte in het vlak van den cirkel O, dus ook op dat vlak.

Ligt een cirkel op een bol, dan noemt men de snijpunten van zijn as met den bol de polen van den cirkel.

Men bewijst gemakkelijk, dat cirkels op een bol, welker vlakken evenwijdig loopen, dezelfde as en dezelfde polen hebben.

Eigenschap 467. *Alle punten van een cirkel op een bol hebben gelijken afstand van elk der beide polen.*

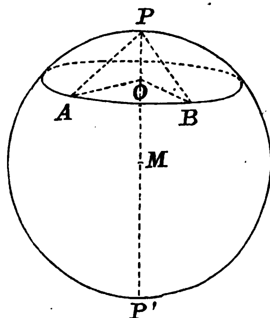


Fig. 441.

Bewijs: Zij O de cirkel en stel dat M O den bol in P en P′ snijdt. Verbindt men dan twee willekeurige punten A en B van den cirkel met O en met een der polen, b. v. met P, dan is

$$\triangle PAO \cong \triangle PBO,$$
$$(PO = PO,\ AO = BO,$$
$$\llcorner POA = \llcorner POB = 1\,R),$$

dus is

$$PA = PB.$$

Denkt men nu door de punten P en A en evenzoo door P en B groote cirkels gebracht, dan zijn de rechten P A en P B gelijke koorden in deze gelijke cirkels, dus zijn ook de bogen P A en P B gelijk. Hieruit volgt:

Eigenschap 468. *Alle punten van een cirkel op een bol hebben gelijken sphaerischen afstand van elk der polen.*

Eigenschap 469. *De sphaerische afstand van de pool van een grooten cirkel tot elk punt van dien cirkel bedraagt* 90°.

Het omgekeerde van deze eigenschap luidt:

Eigenschap 469*. *Als een punt* P *op een bolopppervlak* 90° *is verwijderd van twee punten* Q *en* R *op dat oppervlak, dan is* P *een pool van den grooten cirkel, door* Q *en* R *gaande.*

Bewijs: Denkt men namelijk de punten P, Q en R met het middelpunt M van den bol verbonden, dan is volgens het ondersteldе

$$MP \perp MQ \text{ en } MP \perp MR,$$

dus is M P loodrecht op het vlak van den grooten cirkel Q R.

244. Verstaat men onder den hoek tusschen twee krommen, evenals in de planimetrie, den hoek tusschen de twee raaklijnen, in een snijpunt aan die krommen getrokken, dan gelden de navolgende eigenschappen:

Eigenschap 470. *De hoek tusschen twee groote cirkels op een bol is een standhoek van den tweevlakshoek tusschen hunne vlakken.*

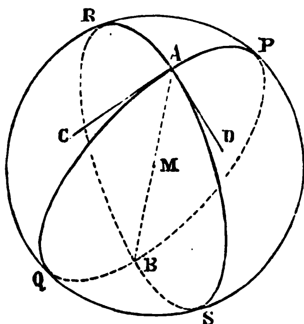


Fig. 442.

Bewijs: Zijn P Q en R S de groote cirkels, zoodat de rechte A B, die hunne snijpunten verbindt, een middellijn is. Men heeft dan slechts te bewijzen, dat de raaklijnen, in A aan die cirkels getrokken, een standhoek vormen.

De raaklijn A D, in A aan den cirkel R S getrokken, staat loodrecht op den straal A M in het vlak R S en is dus een been van den standhoek tusschen de vlakken R S en P Q. Evenzoo is de raaklijn A C het andere been.

Eigenschap 471. *De hoek tusschen twee halve groote cirkels is gelijk aan den boog van den grooten cirkel, die hunne middens verbindt.*

Bewijs: Zijn C A C′ en C *a* C de halve groote cirkels, M en *m*′ hunne middens, dan is volgens de planimetrie

$$MO \perp CC' \text{ en } mO \perp CC',$$

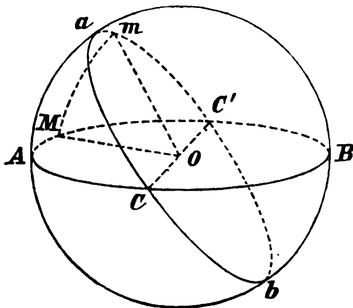


Fig. 443.

dus $\llcorner$ M O m is een standhoek van de vlakken der halve groote cirkels, m. a. w. bg m M is gelijk aan den hoek tusschen die vlakken.

Eigenschap 472. *De hoek tusschen twee groote cirkels is gelijk aan of het supplement van den sphaerischen afstand der polen van de cirkels.*

Gegeven: P en P′ zijn de polen van den grooten cirkel A B, p en p' die van den grooten cirkel $a\,b$.

Te bewijzen: bg. P p = $\llcorner$ a C A.

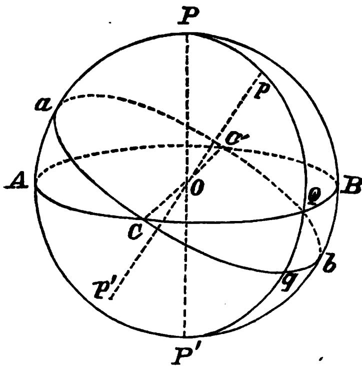


Fig. 444.

Bewijs: Verlengt men den boog P p, tot deze cirkel A B in Q in cirkel $a\,b$ in q snijdt, dan zijn volgens N° 469 bg. P Q en bg. $p\,q$ elk 90°, dus

$$\text{bg. P Q} = \text{bg.}\, p\, q,$$

Vermindert men beide leden dezer vergelijking met den boog p Q, dan vindt men

$$\text{bg. P}\,p = \text{bg. Q}\,q\,. \quad . \quad (1)$$

Nu kan echter gemakkelijk bewezen worden, dat de punten Q en q de middens der bogen C B C′ en C b c′ zijn. Immers, daar

$$\text{O P} \perp \text{het vlak A B en O}\,p \perp \text{het vlak}\ a\,b$$

is, zullen O P en O p beide loodrecht op de snijlijn C C′ dier vlakken zijn, zoodat ook O Q en O q $\perp$ C C′ zijn. Dus zijn Q en q de middens der bogen C B C′ en C b C′ en volgens N° 471 is dan

$$\text{bg Q}\,q = \text{den hoek tusschen de halve cirkels C B C′ en C}\,b\,\text{C′}$$

en volgens (1) is dus ook

$$\text{bg P}\,p = \text{den hoek tusschen die cirkels.}$$

Eindelijk is nu ook duidelijk, dat bg p P′ of bg P p' het supplement moet zijn van den hoek tusschen de halve cirkels C B C′ en C b C′.

245. Wij gaan nu over tot de beschouwing van de raaklijnen aan een bol.

Eigenschap 473. *Een raaklijn aan een bol staat loodrecht op den straal naar het raakpunt.*

Bewijs: Volgens N° 429 heeft men slechts dezelfde eigenschap voor een raaklijn aan een kromme op den bol te bewijzen.

Zij nu P B A Q zulk een kromme en laten A en B twee willekeurige punten daarop voorstellen. Uit de gelijkbeenigheid van $\triangle MAB$ volgt dan, dat

$$\angle MBS = \angle MAR = 90^\circ + \tfrac{1}{2} \angle AMB$$

is. Laat men nu A onveranderd, maar B langs de kromme tot A naderen, dan blijven steeds die twee buitenhoeken de aangegeven waarde behouden, terwijl, als B naast A komt te liggen, $\angle$ ~~MAB~~ AMB tot nul genaderd is, dus is dan

$$\angle MBS = 1\,R.$$

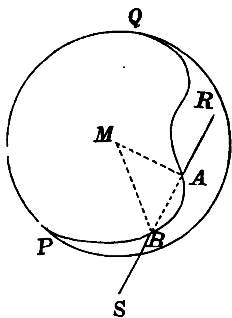


Fig. 445.

Eigenschap 474. *Alle raaklijnen, in een willekeurig punt van een bol aan het oppervlak getrokken, liggen in een plat vlak.*

Bewijs: Deze raaklijnen staan namelijk volgens de vorige eigenschap alle loodrecht op den straal naar het raakpunt en wel in hetzelfde punt van dien straal. Volgens N° 310 liggen dus al die raaklijnen in een plat vlak.

De meetkundige plaats der raaklijnen, in een punt van een bol aan het oppervlak getrokken, wordt r a a k v l a k aan den bol genoemd en dat punt heet het r a a k p u n t van het r a a k v l a k.

Uit het vorige volgt nu onmiddellijk:

Eigenschap 475. *Een raakvlak aan een bol staat loodrecht op den straal naar het raakpunt.*

246. Met betrekking tot den stand eener rechte ten opzichte van een bol valt verder nog het volgende op te merken.

De snijding van een rechte A B met een bol komt daarop neer, die punten der rechte te bepalen, welker afstand tot het middelpunt van den bol gelijk is aan den straal van den bol.

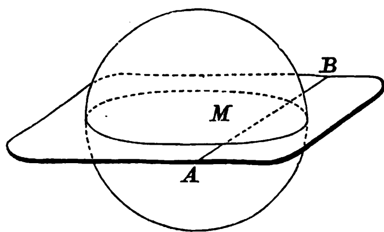


Fig. 446.

Denkt men een vlak gebracht door het middelpunt M en de rechte A B, dan snijdt het den bol volgens een grooten cirkel en het vraagstuk, de snijpunten van A B met den bol te bepalen, is

dan volkomen hetzelfde, als die van A B met dien grooten cirkel te vinden, hetgeen in de planimetrie behandeld is.

Wij verkrijgen dus onmiddellijk volgens N° 83—85 de volgende eigenschappen:

Eigenschap 476. *Als de afstand van een rechte tot het middelpunt van een bol grooter is dan de straal, heeft die rechte met den bol geen enkel punt gemeen.*

Eigenschap 477. *Als de afstand van een rechte tot het middelpunt van een bol gelijk is aan den straal, dan hebben de rechte en de bol één punt gemeen.*

Eigenschap 478. *Als de afstand van een rechte tot het middelpunt van een bol kleiner is dan de straal, dan hebben de rechte en de bol twee punten gemeen.*

247. Uit een punt *buiten* een bol kan men een oneindig groot aantal raaklijnen aan een bol trekken. Want men kan door de rechte, die dat punt met het middelpunt van den bol verbindt, oneindig vele vlakken brengen, en in elk dezer vlakken aan den cirkel, die de doorsnede van zulk een vlak met den bol vormt, een raaklijn trekken. Deze raaklijnen zullen dan volgens N° 429 ook tevens raaklijnen aan den bol zijn.

Eigenschap 479. *De meetkundige plaats der raaklijnen, uit een punt buiten den bol aan dit oppervlak getrokken, is een recht cirkelvormig kegelvlak, dat het punt tot top en de verbindingslijn van het punt met het middelpunt van den bol tot as heeft.*

Bewijs: Zijn P, Q en R de raakpunten van twee willekeurige raaklijnen, door P gaande, dan zijn de driehoeken M P Q en M P R congruent, want

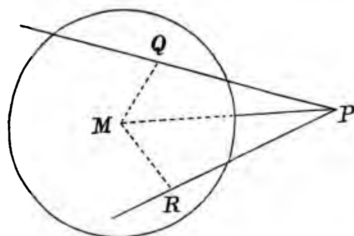


Fig. 447.

$$MQ = MR, \quad MP = MP,$$

en

$$\llcorner MQP = \llcorner MRP = 1R.$$

Dus is

$$\llcorner QPM = \llcorner RPM$$

en volgens N° 442 zal nu de meetkundige plaats der raaklijnen, uit P aan den bol getrokken, een rechte cirkelvormige kegel zijn, die P tot top en M P tot as heeft.

Men zegt, dat de hierdoor verkregen kegel den bol omhult langs de kromme, die door de raakpunten gevormd wordt. Deze kromme zelve wordt dan de aanrakingskromme van de beide oppervlakken genoemd.

Eigenschap 480. *De aanrakingskromme van een bol en een omhullenden kegel is een kleine cirkel van den bol.*

Bewijs: Zijn namelijk Q en R punten der aanrakingskromme en trekt men

$$QQ_1 \perp MP_1, \text{ en } RR_1 \perp MP,$$

dan zijn, zooals reeds in het bewijs van de vorige eigenschap aangetoond is, de driehoeken M Q P en M R P congruent, en dus is

$$\angle QMP = \angle PMR \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nu zijn dus de rechthoekige driehoeken QQ_1M en RR_1M congruent, waaruit volgt

$$MQ_1 = MR_1,$$

zoodat het voetpunt R_1 der loodlijn, uit R op M P neergelaten, samenvalt met het voetpunt Q_1 der loodlijn, uit Q op die zelfde rechte getrokken, en hetzelfde geldt voor de voetpunten van alle loodlijnen, uit de verschillende punten der aanrakingskromme op M P neergelaten.

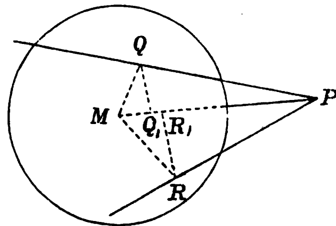


Fig. 448.

De punten der aanrakingskromme zijn dus alle gelegen in loodlijnen, die in één punt Q_1 van M P loodrecht op M P getrokken worden. Zij liggen dus in het vlak, dat in $Q_1 \perp MP$ aangebracht wordt en, daar zij ook op den bol liggen, vormen zij de doorsnede van dat vlak met den bol, d. i. een kleinen cirkel.

Te gelijker tijd volgt uit de reeds herhaaldelijk vermelde congruentie van de driehoeken M Q P en M R P, dat

$$PQ = PR$$

is, of in woorden:

Eigenschap 481. *Alle raaklijnen, uit een punt aan een bol getrokken, zijn gelijk.*

Laat men P hoe langer hoe verder van M zich verwijderen, dan nadert de omhullende kegel tot een omhullenden cylinder.

Uit den rechthoekigen driehoek M Q P in fig. 448 besluit men volgens N⁰ 181

$$MQ^2 = MQ_1 \times MP,$$

of, als $MQ = R$ gesteld wordt,

$$MQ_1 = \frac{R^2}{MP}.$$

Als nu M P in het oneindige aangroeit, dan komt het punt Q_1 volgens deze vergelijking hoe langer hoe dichter bij M te liggen, zoodat ook de afstand van het vlak, waarin de aanrakingskromme ligt, tot het middelpunt van den bol hoe langer hoe kleiner wordt.

Wij komen zoodoende tot

Eigenschap 482. *Een omhullende cylinder raakt een bol volgens een grooten cirkel.*

248. Ten slotte maken wij nog met een enkel woord melding van de verschillende gevallen die ten opzichte van den onderlingen stand van twee bollen onderscheiden kunnen worden.

Men kan namelijk hierbij volkomen dezelfde methode volgen, die in de planimetrie gevolgd werd bij de beschouwing van den onderlingen stand van twee cirkels. Eenvoudiger is echter een andere methode, welke wij bij een enkele der hierop betrekking hebbende stellingen zullen toepassen:

Eigenschap 483. *Als de afstand der middelpunten van twee bollen kleiner is dan de som van hunne stralen en grooter dan het verschil, dan hebben deze bollen een cirkel gemeen.*

Bewijs: Denken wij door de rechte M O een willekeurig vlak U gebracht, dan snijdt dit de bollen volgens twee groote cirkels A B en C D. Voor deze cirkels geldt dan evenzeer, dat de afstand hunner middelpunten kleiner is dan de som en grooter dan het verschil der stralen. Volgens N° 91 zullen zij dus twee punten P en Q gemeen hebben, die dan ook aan de bollen gemeen zijn.

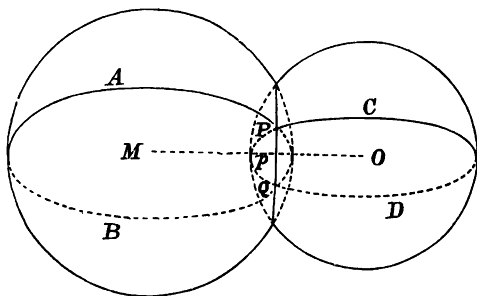


Fig. 449.

Laat men nu het vlak U om M O draaien, dan verkrijgt men telkens een paar andere groote cirkels tot doorsnede, die dan weder andere punten P′ en Q′ gemeen hebben, welke ook tot de beide bollen behooren.

Op deze wijze kan men achtereenvolgens alle punten, die aan de bollen gemeen zijn, verkrijgen en wij zullen aantoonen, dat deze op een cirkel moeten liggen. Daartoe is slechts noodig op te merken, dat bij die draaiing de driehoek M P O onveranderd blijft, zoodat het voetpunt p der loodlijn, uit P of uit Q op M O neergelaten, dan ook steeds dezelfde plaats moet behouden. Dus liggen al de punten P, P′... in een vlak, dat in p loodrecht op M O wordt aangebracht,

en daar zij ook op den bol M (of O) moeten liggen, bevinden zij zich dus in de snijlijn van dat loodrechte vlak met den bol, d. i. in een cirkel.

Volgens deze methode of die, welke in de planimetrie gevolgd is, bewijst men ook gemakkelijk

Eigenschap 484. *Als de afstand der middelpunten van twee bollen gelijk is aan de som of aan het verschil der stralen, dan hebben die bollen één punt gemeen.*

De bollen worden in dit geval r a k e n d genoemd, en wel u i t-w e n d i g r a k e n d of i n w e n d i g r a k e n d, naarmate zich het eerste of het tweede geval voordoet.

Bij het bewijs van N⁰ 484 blijkt onmiddellijk

Eigenschap 485. *Bij twee rakende bollen ligt het raakpunt op de rechte, die de middelpunten verbindt.*

Eindelijk noemen wij nog

Eigenschap 486. *Twee rakende bollen hebben in het raakpunt een gemeenschappelijk raakvlak.*

Bewijs: Zij A het raakpunt van de twee bollen. Het raakvlak aan den bol M in A moet dan volgens N⁰ 475 $\perp$ M A staan en dat aan den bol O in A is evenzoo $\perp$ O A. Daar M A en O A in elkanders verlengde liggen, vallen deze beide raakvlakken volgens N⁰ 311 samen.

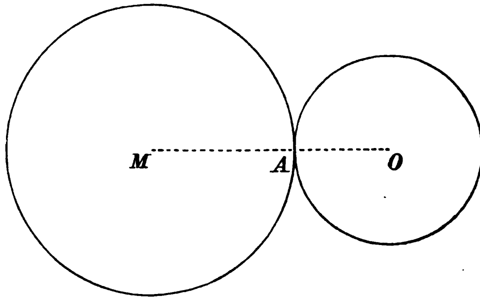


Fig. 450.

Vraagstukken.

949. Bewijs, dat een groote en een kleine cirkel van een bol elkander niet kunnen middendoor deelen.

950. Twee kleine cirkels op een bol kunnen niet hetzelfde middelpunt hebben.

951. Kunnen twee kleine cirkels op een bol elkander middendoor deelen?

952. De hoek tusschen twee kleine cirkels op een bol is niet een standhoek van hunne vlakken.

953. Door een willekeurig punt van een bol kan men slechts één grooten cirkel loodrecht op een gegeven grooten cirkel aanbrengen.

954. Alle rechten, die een willekeurig punt met de verschillende

punten van een bol verbinden, zijn grooter dan het eene en kleiner dan het andere stuk der middellijn, die door dat punt gaat.

955. Hoe construeert men het punt van een bol, dat den kleinsten afstand heeft tot een gegeven rechte, die den bol niet snijdt?

956. Construeer een raakvlak aan een bol, dat evenwijdig is aan een gegeven vlak.

957. Construeer een raakvlak aan een bol door een gegeven rechte, die den bol niet snijdt.

958. De doorsnede van twee raakvlakken aan een bol is evenwijdig aan de as van den grooten cirkel, die door de raakpunten gaat.

959. De hoek tusschen twee raakvlakken aan een bol wordt middendoor gedeeld door het vlak, dat door hunne snijlijn en het middelpunt gaat.

960. De meetkundige plaats der middens van alle koorden van een bol, die door een gegeven punt gaan, is een bol.

961. De loodlijn, uit een willekeurig punt van een bol neergelaten op een middellijn, is middelevenredig tusschen de twee deelen der middellijn.

962. Trekt men uit een punt van een bol een koorde en een middellijn, dan is de koorde middelevenredig tusschen de middellijn en hare projectie daarop.

963. Gegeven een bol M met een straal van 6 cM. en een punt P zoodanig, dat $MP = 9$ cM. is. Bepaal de lengte der loodlijn uit het raakpunt van een door P gaande raaklijn, op MP neergelaten,

964. De middelpunten van twee bollen, met stralen van 5 en 4 dM. beschreven, hebben een afstand van 7 dM. Bepaal den straal van den cirkel, volgens welken de bollen elkander snijden.

965. Trekt men uit een willekeurig punt snijlijnen aan een bol, dan heeft het product der stukken van elke daarop afgesneden koorde een standvastige waarde.

Het product der stukken van een koorde, die door een punt P gaat, heet de macht van het punt ten opzichte van den bol.

*966. De meetkundige plaats der punten, die gelijke machten hebben ten opzichte van twee bollen, is een plat vlak, loodrecht staande op de rechte, die de middelpunten verbindt.

Dit vlak heet het machtvlak der bollen.

*967. De drie machtvlakken van drie bollen, twee aan twee genomen hebben een rechte gemeen.

*968. De zes machtvlakken van vier bollen, twee aan twee genomen, gaan door één punt.

*969. De verbindingslijnen van de uiteinden van elk paar evenwijdige stralen van twee bollen snijden de rechte, die de middelpunten vereenigt, in hetzelfde punt.

Men verkrijgt op deze wijze het inwendig en het uitwendig gelijkvormigheidspunt der bollen.

*970. Een gemeenschappelijk raakvlak aan twee bollen gaat door een der gelijkvormigheidspunten.

*971. Door een gegeven punt een gemeenschappelijk raakvlak aan twee bollen te construeeren.

*972. De drie uitwendige gelijkvormigheidspunten van drie bollen, twee aan twee genomen, liggen op één rechte.

*973. Een gemeenschappelijk raakvlak aan drie bollen te construeeren.

HOOFDSTUK XLIV.

HET OPPERVLAK EN DE INHOUD VAN DEN BOL EN ZIJNE DEELEN.

249. De beide deelen, waarin een bol door een willekeurig plat vlak verdeeld wordt, heeten bolvormige segmenten of **bolsegmenten**.

Het deel van een bol, afgesneden door twee evenwijdige vlakken en tusschen deze gelegen, heet **bolschijf**.

Wij spreken dus in de onderstaande figuur van het bolsegment A C B en van de bolschijf A B E D.

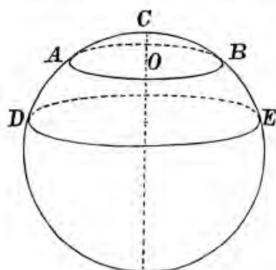


Fig. 451.

Bij een bolsegment noemt men het **grondvlak** den cirkel, volgens welken de bol door het snijvlak gesneden wordt, terwijl de loodlijn O C, op dit vlak in het middelpunt opgericht en begrensd door dat vlak en het bolopperviak, de **hoogte van het segment** heet.

Evenzoo onderscheidt men bij een bolschijf de beide evenwijdige cirkelvormige doorsneden van den bol met de namen **grondvlak** (DE) en **bovenvlak** (AB), — waarbij men gewoonlijk den naam grondvlak aan het grootste dezer vlakken toekent — terwij de rechte, die de middelpunten van grond- en bovenvlak verbindt en die, zooals men gemakkelijk aantoont, loodrecht op beide vlakken staat, de **hoogte der schijf** genoemd wordt.

Om nu tot een formule voor het bolvormig oppervlak dier figuren te geraken, beginnen wij met een vervorming van de formule voor het zijdelingsche oppervlak van een kegel en een afgeknotten kegel.

In N° 488 zal blijken in welk verband de laatstgenoemde oppervlakken tot het oppervlak van een bolsegment of bolschijf staan.

250. **Eigenschap 487.** *Het zijdelingsche oppervlak van een rechten cirkelvormigen kegel of afgeknotten kegel is gelijk aan het product van de hoogte, met den omtrek van een cirkel, die tot straal heeft de rechte, die in het midden van het apothema loodrecht hierop wordt opgericht, gerekend van dat midden tot aan het snijpunt dier rechte met de as van het oppervlak.*

a. **Gegeven** in fig. 452:

$$A\,A' = A'\,T,\ A'\,N \perp A\,T.$$

Te bewijzen: Het zijdelingsche oppervlak van den kegel $= M\,T \times 2\,\pi\,A'\,N$.

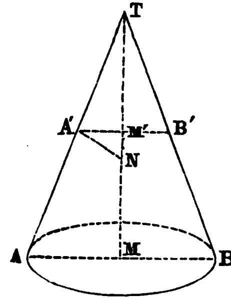


Fig. 452.

Bewijs: Volgens N° 451 is

het zijdelingsche oppervlak van den kegel $=$ $\pi\,A\,M \times A\,T$.

Maar, daar $A\,A' = A'\,T$ is, zoo zal, als men $A'\,B' \,||\, A\,B$ trekt, $A\,M = 2\,A'\,M'$ zijn, derhalve wordt

$$\text{het zijdelingsche oppervlak} = 2\,\pi\,A'\,M' \times A\,T \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nu is echter $\triangle\,A'\,M'\,N \backsim \triangle\,T\,M\,A$, omdat de zijden van den eenen driehoek loodrecht staan op die van den anderen, zoodat zij gelijke hoeken hebben. Dus is

$$A'\,M' : T\,M = A'\,N : A\,T,$$

of

$$A'\,M' \times A\,T = A'\,N \times T\,M,$$

en door deze uitkomst in de vergelijking (1) in te voeren, vindt men

$$\text{het zijdelingsche oppervlak} = 2\,\pi\,A'\,N \times T\,M.$$

b. **Gegeven** in fig. 453: $A\,A' = A'\,C,\ A'\,N \perp A\,C.$

Te bewijzen:

het zijdelingsche oppervlak van den afgekn. kegel $= P\,M \times 2\,\pi\,A'\,N$.

Bewijs: Volgens N° 453 is

het zijdelingsche oppervlak van den afgekn. kegel $= \pi\,(A\,M + C\,P)\,A\,C$.

Trekt men nu in het trapezium A B D C, dat een doorsnede door de as van den afgeknotten kegel voorstelt, een rechte $A'\,B' \,||\, A\,B$, dan is volgens vraagstuk 180

$$A\,M + C\,P = 2\,A'\,M',$$

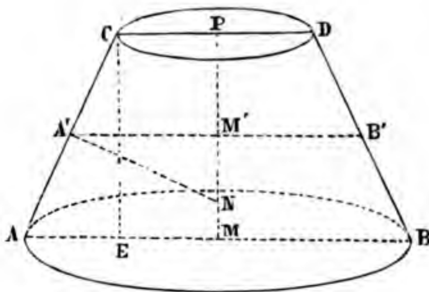


Fig. 453.

dus wordt

het zijdel. oppervlak $=$
$2\pi\, A'M' \times AC$. (2)

Laat men verder uit C een loodlijn CE op AB neer, dan zijn de driehoeken AEC en A'M'N weder gelijkvormig, derhalve

$A'M' : CE = A'N : AC,$

dus

$A'M' \times AC = A'N \times CE,$

en door dit in de vergelijking (2) in te voeren, ontstaat

$$\text{het zijdelingsche oppervlak} = 2\pi\, A'N \times CE,$$
$$= 2\pi\, A'N \times PM.$$

251. **Eigenschap 488.** *Een bolsegment en een bolschijf kunnen beschouwd worden als de grens, waartoe de som van een aantal daarin beschreven afgeknotte kegels nadert bij toename van dat aantal.*

Bewijs: Zij ACB het bolsegment, OC de hoogte daarvan, en denken wij een doorsnede door OC genomen.

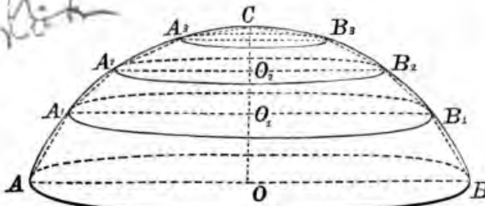


Fig. 454.

Brengt men nu vlakken aan, die evenwijdig met het grondvlak loopen, dan ontstaan de evenwijdige cirkelvormige doorsneden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$.... en het bolsegment is dan verdeeld in een aantal bolschijven ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$... en een klein bolsegment A_3CB_3. Te gelijker tijd ontstaat in de aangenomen doorsnede een cirkelsegment ACB, dat door de rechten A_1B_1, A_2B_2...., die de snijlijnen van de evenwijdige vlakken met de aangenomen doorsnede voorstellen, in de figuren AA_1B_1B, $A_1A_2B_2B_1$.... A_3CB_3 verdeeld is. Denkt men nu de koorden AA_1, A_1A_2.... A_3C getrokken en laat men de gebroken rechte $AA_1A_2A_3C$ om OC wentelen, dan ontstaan afgeknotte kegels en een kleine kegel, die in het bolsegment beschreven zijn. Bij toe-

name van het aantal evenwijdige vlakken, nadert de gebroken lijn $A A_1 A_2 A_3 C$ hoe langer hoe meer tot den cirkelboog $A C$ en hierdoor is het duidelijk, dat dan tevens de som der afgeknotte kegels hoe langer hoe meer zal naderen tot het bolsegment.

De twee vorige eigenschappen stellen ons nu onmiddellijk in staat een formule voor het zijdelingsche oppervlak van een bolsegment en van een bolschijf af te leiden.

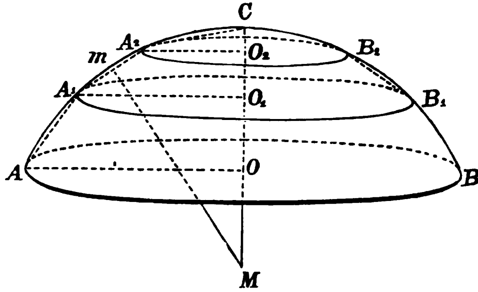


Fig. 455.

Beschouwen wij namelijk een der afgeknotte kegels, b. v. $A_1 A_2 B_2 B_1$ (fig. 455), en bepalen wij hiervan het zijdelingsche oppervlak met behulp van N° 487.

Merken wij daartoe eerst op, dat $O C$ na verlenging door het middelpunt van den bol gaan moet. De loodlijn, in het midden m der koorde $A_1 A_2$ van den cirkel M opgericht, moet evenzeer door M gaan. Dus is nu

het zijdelingsche oppervlak van den afgeknotten kegel $= 2 \pi m M \times O_1 O_2$.

Hierin kan $m M$ als volgt vervangen worden:

$$m M = \sqrt{A_1 M^2 - A_1 m_2} = \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4} A_1 A_2^2},$$

als R de straal van den bol voorstelt, waartoe het segment behoort. Dus is

het zijdelingsche oppervlak van den afgeknotten kegel

$$= 2 \pi O_1 O_2 \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4} A_1 A_2^2}.$$

Een dergelijke uitdrukking vindt men voor elk der afgeknotte kegels en ook voor den kegel, die een deel van het bolsegment vormen.

Door al deze uitdrukkingen op te tellen en daarna de grens te bepalen, vindt men het oppervlak van het bolsegment. Daarbij nadert $A_1 A_2$ tot nul en dus nadert de som tot

$$2 \pi O O_1 \times R + 2 \pi O_1 O_2 \times R + \ldots = 2 \pi R (O O_1 + O_1 O_2 + \ldots),$$
$$= 2 \pi R \times O C.$$

Hierdoor hebben wij dus verkregen:

Eigenschap 489. *Het bolvormig oppervlak van een bolsegment en van een bolschijf is gelijk aan het product van de hoogte met den omtrek van een grooten cirkel van den bol, waartoe het segment behoort.*

Opmerking: Laat men eenige opeenvolgende zijden van een regelmatigen veelhoek om een middellijn van den omgeschreven cirkel wentelen, dan ontstaat een oppervlak, dat ook als de som van een aantal afgeknotte kegels beschouwd kan worden. Past men nu ter bepaling van de grootte van dit oppervlak op elk dezer afgeknotte kegels de eigenschap toe, die wij met N° 487 aangeduid hebben, en telt daarna de verkregen vergelijkingen samen, dan komt men na eenige herleiding gemakkelijk tot:

Eigenschap 490. *Het oppervlak, beschreven door eenige opeenvolgende zijden van een regelmatigen veelhoek, die om een middellijn van den omgeschreven cirkel wentelt, is gelijk aan het product van de projectie van dat deel van den veelhoek op die middellijn met den omtrek van den ingeschreven cirkel van den veelhoek.*

In een formule kan men het bolvormig oppervlak van een bolsegment of bolschijf door

$$2 \pi R h$$

voorstellen, als R de straal van den bol en h de hoogte is.

Een halve bol kan beschouwd worden als een bolsegment, waarvan de hoogte gelijk is aan den straal van den bol, dus is het bolvormig oppervlak van een halven bol

$$2 \pi R^2,$$

en het oppervlak van den bol moet dus zijn

$$4 \pi R^2.$$

Wij hebben hiermede bewezen:

Eigenschap 491. *Het oppervlak van een bol is het viervoud van dat van een grooten cirkel.*

252. Wanneer een willekeurig kegelvlak met zijn top in het middelpunt van een bol geplaatst is, dan wordt door het kegelvlak en het bolopppervlak een figuur begrensd, die men kegelvormigen bolsector noemt.

Welke ook de aard van dat kegelvlak zijn moge, altijd bestaat

Eigenschap 492. *De inhoud van een kegelvormigen bolsector is gelijk aan het derde deel van het product van den straal van den bol met het deel van het oppervlak van den bol, dat door het kegelvlak afgesneden wordt.*

Bewijs: Zij A B C D een willekeurige gesloten kromme, op het oppervlak van een bol getrokken, die als richtlijn voor het kegelvlak met den top M aangenomen zij.

Neem dan binnen die kromme op het bolopppervlak een groot aantal punten $p\,q\,r\,s\ldots$ aan en verbind deze, zoodat een groot aantal drie-

hoekjes pqr, qrs,... ontstaan, dan kan men het bolvormig oppervlak beschouwen als de grens, waartoe de som van de oppervlakken van al die driehoekjes nadert, als men het aantal op den bol aangenomen punten voortdurend laat toenemen.

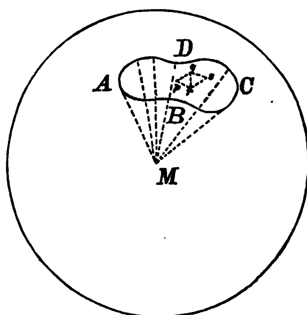


Fig. 456.

Denkt men bovendien al die punten p, q, r.... met M verbonden, dan ontstaan pyramiden $Mpqr$, $Mqrs$.... en de kegelvormige bolsector zal dan de grens zijn, waartoe de som dezer pyramiden bij toename van het aantal punten p, q, r.... nadert.

Beschouwen wij nu een dezer pyramiden afzonderlijk, b. v. $Mpqr$, en denken wij daarin de hoogtelijn uit M getrokken. Het voetpunt zij met m aangeduid en worde met p, q, r verbonden. Dan is (fig. 457),

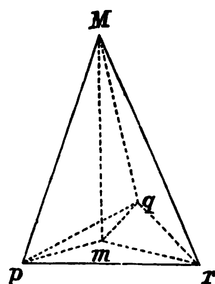


Fig. 457.

$$\triangle Mpm \cong \triangle Mqm \cong \triangle Mrm,$$

want het eerste paar dezer driehoeken heeft b. v. mM gemeen en verder is $Mp = Mq =$ den straal van den bol, terwijl

$$\angle Mmp = \angle Mmq = 1\,R$$

is. Dus is

$$mp = mq = mr = \text{den straal van den cirkel, om } \triangle pqr \text{ beschreven.}$$

Duidt men dezen met r en den straal van den bol met R aan, dan is nu

$$Mm = \sqrt{R^2 - r^2},$$

en dus is

$$\text{de inhoud der pyramide } Mpqr = \tfrac{1}{3}(\triangle pqr)\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Op dezelfde wijze vindt men voor de pyramide $Mqrs$

$$\text{Inhoud} = \tfrac{1}{3}(\triangle qrs)\sqrt{R^2 - r_1^2},$$

als r_1 de straal is van den cirkel, om $\triangle qrs$ beschreven.

Door voor alle pyramiden den inhoud te bepalen, de uitkomsten te sommeeren en van die som de grens te zoeken, vindt men ten slotte den inhoud van den kegelvormigen bolsector. Laat men nu p, q, r, s... voortdurend meer tot elkander naderen, dan zullen ook de stralen der

omgeschreven cirkels van de driehoekjes $p\,q\,r$, $q\,r\,s$,... steeds meer tot nul naderen, zoodat

$$\sqrt{R^2 - r^2},\ \sqrt{R^2 - r_1^2}\ldots.$$

ten slotte in R overgaan. Dus is

de inhoud van den kegelvormigen bolsector =

$= \text{de grens van } \frac{1}{3} R(\triangle\, p\,q\,r + \triangle\, q\,r\,s \ldots.)$,

$= \frac{1}{3} R \times$ het oppervlak der figuur A B C D op den bol.

Opmerking: Trekt men op het oppervlak van den bol twee gesloten krommen A B C D en $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$, waarvan de eerste geheel binnen de tweede ligt, dan kan men twee kegelvlakken met M als top construeeren, die elk een dier krommen tot richtlijn hebben, en men ziet dan onmiddellijk in, dat voor het deel van den bol, dat tusschen die twee kegelvlakken ligt, evenzeer de formule geldt:

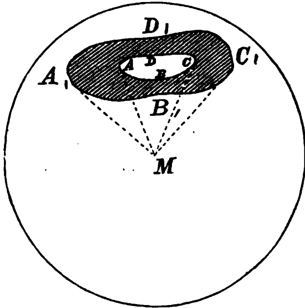


Fig. 458.

Inhoud $= \frac{1}{3}$ R $\times$ het oppervlak van het deel van den bol, gelegen tusschen A B C D en $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$.

253. Indien de kromme A B C D in fig. 457 een kleine cirkel op den bol wordt, zooals in fig. 459, dan kan de inhoud van den daarbij behoorenden kegelvormigen bolsector gemakkelijk verder berekend worden. Want nu is het deel van het bolopperviak, door dien cirkel begrensd, dat van een bolsegment, dus is

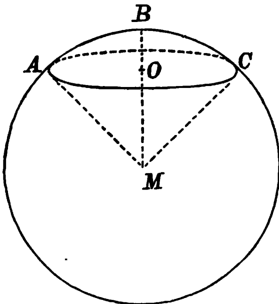


Fig. 459.

de inh. van den kegelv. bolsector M A B C

$= \frac{1}{3} R \times \text{opp. } A\,B\,C = \frac{1}{3} R \times 2\,\pi\, R\, h,$

$= \frac{2}{3}\,\pi\, R^2\, h, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

waarin $h =$ O B de hoogte van het bolsegment voorstelt.

Wanneer wij in het vervolg van een kegelvormigen bolsector spreken, bedoelen wij steeds een zoodanigen, waarbij het kegelvlak, zooals in fig. 459, recht en cirkelvormig is.

Laat men den cirkel O in fig. 459 steeds meer tot het middelpunt M naderen, zoodat die cirkel eindelijk in een grooten cirkel overgaat,

dan kan men uit de vergelijking (1) den inhoud van een halven bol bepalen. Omdat h dan in R overgaat, vindt men:

$$\text{de inhoud van een halven bol} = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^3,$$

en hieruit volgt nu

Eigenschap 493. *De inhoud van een bol is* $\tfrac{4}{3}\,\pi\,R^3$.

Somtijds is het wenschelijk den inhoud van een bol uitgedrukt in zijn middellijn d te kennen. Omdat $R = \tfrac{1}{2}\,d$ is, vindt men

$$I = \tfrac{4}{3}\,\pi\,(\tfrac{1}{2}\,d)^3 = \tfrac{1}{6}\,\pi\,d^3.$$

254. Het is nu gemakkelijk uit het vorige den inhoud van een bolvormig segment af te leiden. Want in fig. 460 is

Inh. bolsegment A B C = Inh. bolsector M A B C — Inh. kegel M A C.

Noemt men $A\,O = r$ en overweegt, dat $M\,O = R - h$ is, dan wordt dus

$$\text{Inh. bolsegment } A\,B\,C = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^2\,h - \tfrac{1}{3}\,\pi\,r^2\,(R - h) \quad (1)$$

Deze formule kan nu op twee wijzen vervormd worden. Verlengt men namelijk B M tot deze rechte den bol opnieuw in D snijdt, dan is volgens N⁰ 217

$$A\,O^2 = B\,O \times O\,D$$

of

$$r^2 = h\,(2\,R - h) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Fig. 460.

Met behulp van deze betrekking kan men nu uit de vergelijking (1) òf r elimineeren en daardoor den inhoud van het bolsegment in R en h uitdrukken, òf R elimineeren en zoodoende een formule voor den inhoud van het bolsegment, uitgedrukt in r en h, vinden.

1⁰. Substitueert men de waarde van r uit (2) in (1), dan wordt

$$\text{Inh. bolsegment } A\,B\,C = \tfrac{2}{3}\,\pi\,R^2\,h - \tfrac{1}{3}\,\pi\,h\,(2\,R - h)\,R - h),$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\pi\,h\,[2\,R^2 - (2\,R - h)\,(R - h)],$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\pi\,h\,(3\,R\,h - h^2),$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\pi\,h^2\,(3\,R - h).$$

2⁰. Lost men uit (2) R op, dan vindt men

$$r^2 = 2\,R\,h - h^2,$$
$$R = \frac{r^2 + h^2}{2\,h}.$$

Alvorens deze uitkomst in (1) te substitueeren, berekenen wij

$$R - h = \frac{r^2 + h^2}{2h} - h = \frac{r^2 - h^2}{2h},$$

en nu gaat dus (1) over in

$$\text{Inhoud bolsegment A B C} = \tfrac{2}{3}\pi h \left(\frac{r^2 + h^2}{2h}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\pi r^2 \frac{r^2 - h^2}{2h},$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \frac{(r^2 + h^2)^2}{2h} - \tfrac{1}{3}\pi \frac{r^4 - r^2 h^2}{2h},$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \frac{r^4 + 2h^2 r^2 + h^4 - r^4 + r^2 h^2}{2h},$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \frac{3h^2 r^2 + h^4}{2h},$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi r^2 h + \tfrac{1}{6}\pi h^3.$$

Nu is echter $\frac{1}{2}\pi r^2 h$ of $\pi r^2 \times \frac{1}{2} h$ de inhoud van een cylinder, die het grondvlak van het segment tot grondvlak en de halve hoogte van het segment tot hoogte heeft, en $\frac{1}{6}\pi h^3$ is de inhoud van een bol, waarvan h de middellijn is. Deze lichamen zijn in fig. 461 voorgesteld; het segment is gelijk aan hun som.

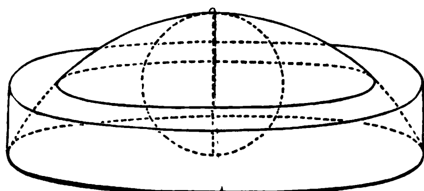


Fig. 461.

Wij hebben dus gevonden:

Eigenschap 494. *De inhoud van een bolsegment is gelijk aan de som der inhouden van een bol, die de hoogte van het segment tot middellijn heeft, en van een cylinder, die het grondvlak van het segment tot grondvlak en de halve hoogte van het segment tot hoogte heeft.*

255. Eindelijk kan nu ook een formule voor den inhoud van een bolschijf afgeleid worden.

Hierbij duiden wij de stralen van het grond- en bovenvlak met r en r_1 en de hoogte van de schijf met h aan. In fig. 462 is dus $AO = r$, $CP = r_1$, $OP = h$.

Wij beschouwen nu de bolschijf als het verschil van twee bolsegmenten:

Inh. bolschijf A B D C = Inh. bolsegm. A E B — Inh. bolsegm. C E D.

Stellen wij nog $OE = H$ en $PE = H_1$, dan is volgens N° 494

$$\text{Inh. bolschijf A B D C} = \tfrac{1}{2}\pi r^2 H + \tfrac{1}{6}\pi H^3 - (\tfrac{1}{2}\pi r_1^2 H_1 + \tfrac{1}{6}\pi H_1^3),$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi (H r^2 - H_1 r_1^2) + \tfrac{1}{6}\pi (H^3 - H_1^3). \quad . \quad (1)$$

Om deze formule te vereenvoudigen, merken wij op, dat nog de betrekkingen bestaan

$$r^2 = H(2R - H) = 2RH - H^2,$$
$$r_1^2 = H_1(2R - H_1) = 2RH_1 - H_1^2.$$

Aangezien echter in de formule, die wij zooeven voor den inhoud van een bolschijf vonden, R niet voorkomt, is het noodig uit de twee

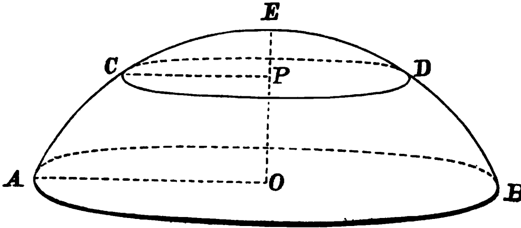


Fig. 462.

zooeven vermelde betrekkingen R te verdrijven. Daartoe heeft men slechts de eerste vergelijking met H_1, de tweede met H te vermenigvuldigen en de verkregen producten af te trekken. Dan wordt

$$H_1 r^2 - H r_1^2 = -H_1 H^2 + H H_1^2,$$
$$= -H H_1 (H - H_1) = -H H_1 h \quad . \quad (2)$$

Let men nu op de formule (1), dan blijkt, dat daarin de vorm

$$H r^2 - H_1 r_1^2$$

voorkomt en om hierbij nu van de betrekking (2) gebruik te kunnen maken, handelen wij, op de figuur lettende, als volgt:

$$H r^2 - H_1 r_1^2 = (H_1 + h) r^2 - (H - h) r_1^2,$$
$$= H_1 r^2 - H r_1^2 + h (r^2 + r_1^2).$$

Indien men hierin nu de waarde van $H_1 r^2 - H r_1^2$ uit (2) invoert, ontstaat

$$H r^2 - H_1 r_1^2 = -H H_1 h + h (r^2 + r_1^2) = h (r^2 + r_1^2 - H H_1).$$

Eindelijk vervormen wij de grootheid $H^3 - H_1^3$, in (1) voorkomende, aldus

$$H^3 - H_1^3 = (H - H_1)(H^2 + H H_1 + H_1^2) = h (H^2 + H H_1 + H_1^2),$$

zoodat nu (1) overgaat in

$$\text{bolschijf ABDC} = \tfrac{1}{2} \pi h (r^2 + r_1^2 - H H_1) + \tfrac{1}{6} \pi h (H^2 + H H_1 + H_1^2),$$
$$= \tfrac{1}{2} \pi h (r^2 + r_1^2) + \tfrac{1}{6} \pi h (H^2 + H H_1 + H_1^2 - 3 H H_1),$$
$$= \tfrac{1}{2} \pi h (r^2 + r_1^2) + \tfrac{1}{6} \pi h (H - H_1)^2,$$
$$= \tfrac{1}{2} \pi r^2 h + \tfrac{1}{2} \pi r_1^2 h + \tfrac{1}{6} \pi h^3,$$

of in woorden:

Eigenschap 495. *De inhoud van een bolschijf is gelijk aan de som der inhouden van een bol, die de hoogte van de schijf tot middellijn heeft en twee cylinders, die elk de halve hoogte der schijf tot hoogte en respectievelijk het grond- en het bovenvlak der schijf tot grondvlak hebben.*

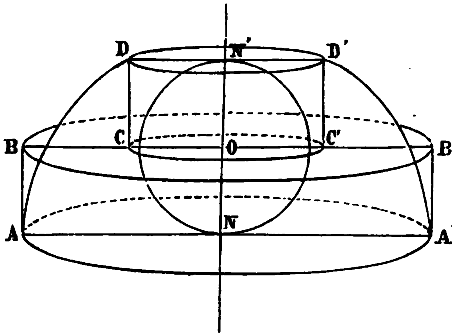


Fig. 463.

Fig. 463 verduidelijkt deze stelling.

Het is niet te ontkennen, dat de hier gevolgde afleiding van den inhoud eener bolschijf, hoe natuurlijk ook in den aanvang, bij het vervolgen der berekening iets kunstmatigs heeft. Daarom deelen wij in het volgende hoofdstuk een andere afleiding mede, die, wat de berekening betreft, zeer eenvoudig, maar juist in haar uitgangspunt niet van kunstmatigheid vrij te pleiten is.

Vraagstukken.

974. Het oppervlak, beschreven door een regelmatigen 2 n-hoek, die om een middellijn van den omgeschreven cirkel, door een der hoekpunten gaande, wentelt, is gelijk aan het product van die middellijn met den omtrek van den ingeschreven cirkel van den veelhoek.

975. Drie opeenvolgende zijden van een regelmatigen achthoek wentelen om de middellijn, door één der uiteinden van die gebroken rechte gaande. Hoe groot is het oppervlak, dat bij één omwenteling beschreven wordt, als de zijde van den achthoek 8 cM. bedraagt?

976. Men vraagt een boloppervlak door evenwijdige vlakken in n gelijke deelen te verdeelen.

977. De straal van het grondvlak van een bolsegment bedraagt 3 cM. en de hoogte van het segment is 1 cM. Hoe groot is het oppervlak?

978. Een regelmatige tienhoek A B C D wentelt om de middellijn, door A gaande. Hoe groot zijn de oppervlakken, die door elk der bogen

A B en B C van den omgeschreven cirkel van den tienhoek wenteling beschreven worden?

979. Een kleine cirkel op een bol, waarvan de straal 5 cM. be is de richtlijn van een kegel, waarvan de top in het middelpu den bol ligt. Hoe groot is het geheele oppervlak en de inho den ontstanen kegelvormigen bolsector, als de straal van den cirkel 4 cM. bedraagt?

980. Hoe groot is de inhoud van een kegelvormigen bolsec gesneden wordt uit een bol, met 4 cM. straal beschreven, d rechten cirkelvormigen kegel, waarvan de asdoorsnede een t van 120° heeft.

981. Als het oppervlak van een bol 6,16 dM^2 bedraagt, ho is dan de inhoud?

982. De oppervlakken van twee bollen verhouden zich als c kanten, de inhouden als de derde machten der stralen.

983. Van een bol, waarvan de straal 13 cM. bedraagt, wo segment afgesneden, welks hoogte 8 cM. is. Bepaal den inho dit segment.

984. Een bol, waarvan de straal 1 dM. bedraagt, wordt ge door twee evenwijdige platte vlakken, welker afstand 3 cM. be Als de straal van de kleinste doorsnede 6 cM. is, hoe groot de inhoud en het oppervlak van de door die vlakken begrensde bol

985. Hoe groot is de inhoud van een bolsegment, welks op het n-de deel is van dat van een bol met straal R?

986. De stukken, die een bol afsnijdt van alle boloppervlakk door zijn middelpunt gaan, zijn gelijk.

987. A B is een middellijn van een cirkel M. C en D zij punten van den cirkel zoodanig, dat

$$\angle CMA = 30° \text{ en } \angle DMA = 75°.$$

Hoe groot is het oppervlak en de inhoud van de schijf, die besc wordt, als boog C D om A B wentelt?

988. $\triangle$ A B C is rechthoekig in C. A C = 3 cM. en B C = Men beschrijft om A en B als middelpunten bollen, waarvan B C de stralen zijn. Hoe groot is het oppervlak en de inhoud der figuren, die door de twee boloppervlakken te gelijk begrensd w

---

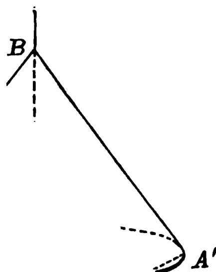
HOOFDSTUK XLV.

INHOUDEN VAN LICHAMEN, BESCHREVEN DOOR WENTELENDE VLAKKE FIGUREN.

256. Wij beschouwen eerst de figuren, die door wenteling van een driehoek om een in zijn vlak gelegen as ontstaan, en beginnen daartoe met het eenvoudigste geval, namelijk dat, waarin een driehoek om een zijner zijden wentelt.

Daarbij duiden wij den inhoud, door △ A B C beschreven, kortheids- 've met I (△ A B C) aan.

' A B C (fig. 464) de driehoek, wentelende om de zijde B C. Het hoekpunt A beschrijft daarbij een cirkel O, waarvan het vlak loodrecht op B C staat; het middelpunt is het voetpunt der loodlijn, uit A op B C neergelaten, en de straal is de lengte dier loodlijn.



Men ziet nu onmiddellijk de juistheid der volgende formules in:

$$I(\triangle ABC) = \text{Inh. kegel } ABA' + \text{Inh. kegel } ACA',$$
$$= \tfrac{1}{3} BO \times \pi AO^2 + \tfrac{1}{3} CO \times \pi AO^2,$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi AO^2 (BO + OC),$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi AO^2 \times BC.$$

Nu is echter $AO \times BC$ het ɦele van het oppervlak van . derhalve

A B C,

A O. . . . . (1)

Eigenschap 496. *De inhoud van het lichaam, beschreven door een driehoek, die om een zijner zijden wentelt, is gelijk aan het derde deel van het product van het oppervlak van den driehoek met den weg, door het wentelende hoekpunt bij een omwenteling beschreven.*

Deze formule kan echter nog in een andere gedaante gebracht worden, indien men opmerkt, dat

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB \times CD,$$

waarin C D de hoogtelijn van △ A B C uit C voorstelt. Nu gaat namelijk (1) over in:

$$I(\triangle ABC) = \tfrac{1}{3} \pi AB \times CD \times AO,$$
$$= \tfrac{1}{3} CD \times \pi AB \times AO,$$

en de hierin voorkomende vorm π A B $\times$ A O stelt het zijdelingsche oppervlak van den kegel A B A′ voor of wel het oppervlak, dat door de zijde A B bij één omwenteling beschreven wordt. Derhalve heeft men verkregen:

Eigenschap 497. *De inhoud, beschreven door een driehoek, die om een zijner zijden wentelt, is gelijk aan het derde deel van het product van het oppervlak, door een der wentelende zijden beschreven, met de hoogtelijn van den driehoek op die zijde.*

257. Onderstellen wij nu verder, dat de driehoek A B C wentelt om een lijn P Q, in zijn vlak gelegen en door een der hoekpunten, hier C, gaande.

Wij denken nu A B verlengd, tot zij P Q in D snijdt en beschouwen △ A B C als het verschil der driehoeken A C D en B C D. Dan is dus ook

$$I(\triangle ABC) = I(\triangle ACD) - I(\triangle BCD) \quad . (1)$$

Passen wij nu de laatste der beide zooeven afgeleide eigenschappen toe. Indien C E ⊥ A B getrokken en het oppervlak, door de rechte A B bij één omwenteling beschreven, met O (A B) aangeduid wordt, dan is

$$I(\triangle ACD) = \tfrac{1}{3} CE \times O(AD),$$
$$I(\triangle BCD) = \tfrac{1}{3} CE \times O(BD),$$

dus door aftrekking in verband met (1)

$$I(\triangle ABC) = \tfrac{1}{3} CE \times [O(AD) - O(BD)]$$
$$= \tfrac{1}{3} CE \times O(AB).$$

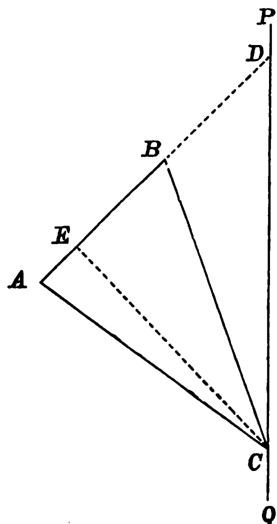


Fig. 465.

In woorden luidt deze formule:

Eigenschap 498. *Als een driehoek wentelt om een rechte, in zijn vlak gelegen en door een der hoekpunten gaande, dan is de inhoud van het ontstane lichaam gelijk aan het derde deel van het product van het oppervlak, door de over dat hoekpunt liggende zijde bij een omwenteling beschreven, met de hoogtelijn van den driehoek op die zijde.*

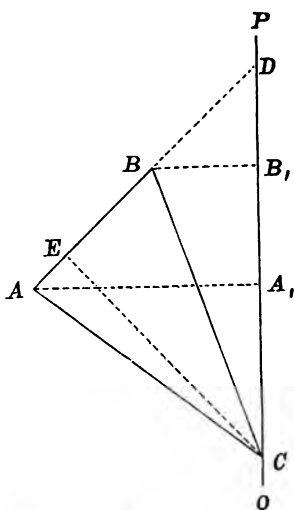


Fig. 466.

Men kan de vorige formule nog belangrijk vervormen en daardoor den inhoud van de figuur, die door de wenteling van den driehoek ontstaat, nog op andere wijze uitdrukken. Daar namelijk de rechte A B bij haar wenteling om P Q het zijdelingsche oppervlak van een afgeknotten kegel beschrijft — welke afgeknotte kegel dan tot grond- en bovenvlak heeft de cirkels met de stralen $A A_1$ en $B B_1$ beschreven om A_1 en B_1 als middelpunten — zoo laat de vorige formule volgens N° 449 zich in de gedaante brengen

$$I(\triangle ABC) = \tfrac{1}{3} CE \times \pi AB (BB_1 + AA_1),$$
$$= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} CE \times AB \times (2\pi BB_1 + 2\pi AA_1),$$
$$= \tfrac{1}{3} \triangle ABC \times (2\pi BB_1 + 2\pi AA_1),$$

of in woorden:

Eigenschap 499. *Als een driehoek wentelt om een rechte, in zijn vlak gelegen en door een der hoekpunten gaande, dan is de inhoud van het ontstane lichaam gelijk aan het derde deel van het product van het oppervlak van den driehoek met de som der wegen, door de beide wentelende hoekpunten bij één omwenteling beschreven.*

258. Eindelijk onderstellen wij, dat △ A B C om een geheel willekeurige rechte P Q in zijn vlak wentelt, en geraken daardoor tot de meest algemeene stelling, die aldus in woorden kan worden uitgedrukt:

Eigenschap 500. *Als een driehoek om een willekeurige rechte in zijn vlak wentelt, dan is de inhoud van het daardoor ontstane lichaam gelijk aan het derde deel van het product van het oppervlak van den wentelenden driehoek met de som der wegen, door elk der hoekpunten bij één omwenteling beschreven.*

Bewijs: Verlengt men de zijde A C van den driehoek, tot zij de omwentelingsas P Q in D snijdt en verbindt daarna dit snijpunt met het hoekpunt B, dan is

$$I(\triangle ABC) = I(\triangle ABD) - I(\triangle BCD) \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

Nu is volgens N° 499

$$\left.\begin{aligned} I(\triangle ABD) &= \tfrac{1}{3}\,\triangle ABD \times 2\pi\,(AA_1 + BB_1) \\ \text{en}\quad I(\triangle BCD) &= \tfrac{1}{3}\,\triangle BCD \times 2\pi\,(CC_1 + BB_1) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (2)$$

Wij zullen nu de oppervlakken der driehoeken ABD en BCD in dat van $\triangle ABC$ uitdrukken. Daartoe merken wij op, dat, als men AD en CD als de bases dier driehoeken beschouwt en dus het punt B als hun gemeenschappelijken top, de hoogte voor beide driehoeken dezelfde is, namelijk de loodlijn, uit B op AD neergelaten. Dus verhouden de oppervlakken der driehoeken ABD en BCD zich als de bases AD en CD of, omdat $AA_1 \parallel CC_1$ is, ook als AA_1 en CC_1. Dus is

$$\triangle ABD : \triangle BCD = AA_1 : CC_1,$$

en hieruit volgt

$$(\triangle ABD - \triangle BCD) : (AA_1 - CC_1) = \\ = \triangle ABD : AA_1,$$

of

$$= \triangle BCD : CC_1.$$

Daar $\triangle ABD - \triangle BCD = \triangle ABC$ is, volgt hieruit

$$\triangle ABD = \frac{AA_1 \times \triangle ABC}{AA_1 - CC_1},$$

$$\triangle BCD = \frac{CC_1 \times \triangle ABC}{AA_1 - CC_1}.$$

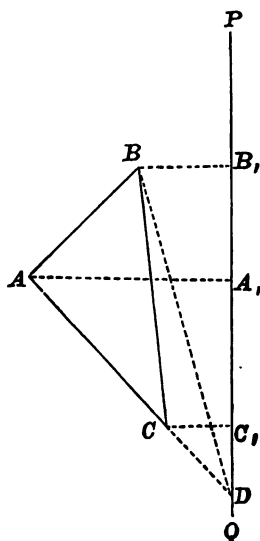


Fig. 467.

Voert men deze waarden nu in de vergelijkingen (2) in, dan wordt

$$I(\triangle ABD) = \tfrac{1}{3} \times 2\pi \frac{AA_1\,(AA_1 + BB_1) \times \triangle ABC}{AA_1 - CC_1},$$

$$I(\triangle BCD) = \tfrac{1}{3} \times 2\pi \frac{CC_1\,(CC_1 + BB_1) \times \triangle ABC}{AA_1 - CC_1},$$

en door aftrekking in verband met (1)

$$I(\triangle ABC) = \tfrac{1}{3} \times 2\pi \frac{[AA_1^2 - CC_1^2 + (AA_1 - CC_1)\,BB_1] \times \triangle ABC}{AA_1 - CC_1},$$

of, indien nu de deeling uitgevoerd wordt,

$$I(\triangle ABC) = \tfrac{1}{3} \times 2\pi\,(AA_1 + CC_1 + BB_1) \times \triangle ABC \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Opmerking: Indien men het zwaartepunt Z van $\triangle$ A B C construeert en hieruit een loodlijn $Z Z_1$ op P Q neerlaat, dan is volgens een bekend vraagstuk in de planimetrie (De loodlijn, uit het zwaartepunt van een driehoek op een willekeurige rechte in het vlak van den driehoek neergelaten, is gelijk aan het derde deel van de som der loodlijnen, uit elk der hoekpunten van den driehoek op die rechte neergelaten)

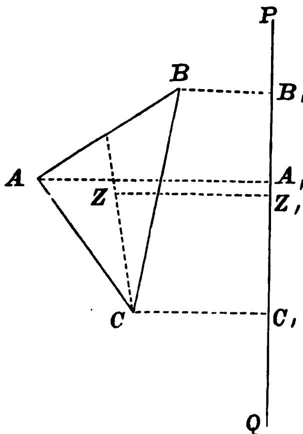


Fig. 468.

$$Z Z_1 = \tfrac{1}{3} (A A_1 + B B_1 + C C_1).$$

Hiermede gaat nu de vergelijking (3) over in

$$I(\triangle A B C) = 2 \pi Z Z_1 \times \triangle A B C,$$

dus in woorden:

Eigenschap 501. *Wentelt een driehoek om een rechte, in zijn vlak gelegen, dan is de inhoud van het daardoor ontstane lichaam gelijk aan het product van het oppervlak van het lichaam met den weg, door het zwaartepunt van den driehoek bij één omwenteling beschreven.*

259. Wij zullen het vorige nu toepassen ter berekening van den inhoud van het ringvormige lichaam, dat ontstaat, als een willekeurig cirkelsegment A C B om een middellijn P Q van den cirkel, waartoe het segment behoort, wentelt.

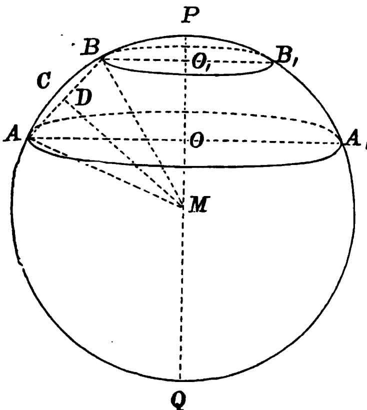


Fig. 469.

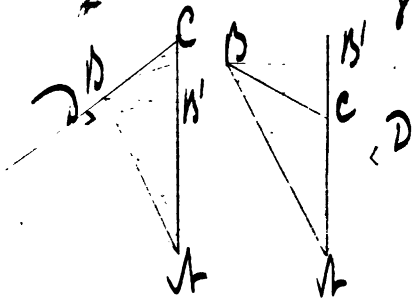
Beschouwen wij het segment als het verschil van den cirkelsector M A C B en den driehoek M A B, dan is dus

$$I(\text{segment } A C B) =$$
$$I(\text{sector } M A C B) - I(\triangle M A B)\,. \quad (1)$$

De punten A en B beschrijven bij de wenteling om P Q cirkels op den bol, zoodat M A en M B rechte cirkelvormige kegelvlakken beschrijven. Op het lichaam, dat door die kegelvlakken uit den bol gesneden wordt, is nu de opmerking aan het slot van § 252 van toepassing. Dus is

De inhoud van het lichaam dat ontstaat door wenteling van een driehoek om een as die in het vlak van die driehoek gelegen is en door een van de hoekpunten gaat (terwijl de driehoek zich aan een zijde van die as uitstrekt) is gelijk aan $\frac{1}{3}$ van de hoogtelijn door het derde hoekpunt vermenigvuldigd met het oppervlak door de overstaande zijde beschreven.

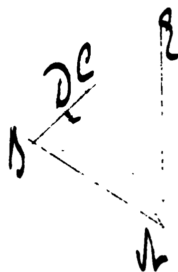
I Een van de zijden valt langs de as.



Men beschouwt de gev. inhoud als de som of het verschil van twee kegels en verkrijgt in beide gevallen.

$$I(ABC) = \tfrac{1}{3}\pi BB_1^2 \times AC$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi BB_1 \times (BB_1 \times AC)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi BB_1 \times (BC \times AD)$$
$$= \tfrac{1}{3}(\pi BB' \times BC) \times AD$$
$$= \tfrac{1}{3} AD \times O(BC)$$

II De driehoek ligt willekeurig



$$I(ABC) = I(ABQ) - I(ACQ)$$

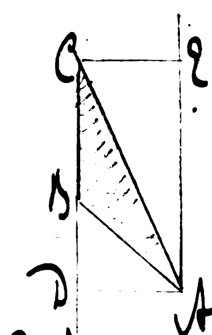
volgens I

$$I(ABQ) = \tfrac{1}{3} AD \times O(BQ)$$
$$I(ACQ) = \tfrac{1}{3} AD \times O(CQ)$$

$$I(ABC) = \tfrac{1}{3} AD \{O(BQ) - O(CQ)\}$$

[illegible]

III een zijde // as v. wenteling



Nu beschouwt men de gen. inhoud als het verschil van I(ACD) en I(ABD)

I(ACD) beschouwen we als inh. cyl. (ADCQ) verminderd met de inhoud kegel (ACQ)

Inh cyl. = grondvlak × hoogte
en kegel = 1/3 grondvlak × hoogte
Dus is

$I(ACD) = \frac{2}{3}$ cylinder ADCQ

$= \frac{2}{3}\pi AD^2 \times CD$

$= \frac{1}{3} AD \times 2\pi AD \times CD$

& $I(ACD) = \frac{1}{3} AD \times O(CD)$
Evenzoo
$I(ABD) = \frac{1}{3} AD \times O(BD)$
Dus door aftrekking
$I(ABC) = \frac{1}{3} AD \times \{O(CD) - O(BD)\}$

$= \frac{1}{3} AD \times O(BC)$

~~Bijzonder geval.~~
~~De driehoek~~ die wentelt is gelijkbenig

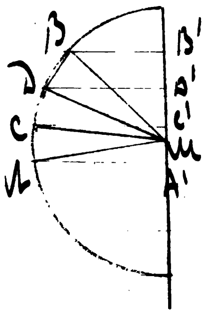
$I(ABC) = \frac{1}{3} AD \times O(BC)$
(volgens 487) $= \frac{1}{3} AD \times 2\pi AD \times B'C'$
Immers de hoogtelijn van $\triangle ABC$ is tevens de lijn die BC rechthoekig middendoor deelt.



Men verwacht dus het kwadraat van AB

$$I(MBC) = \tfrac{2}{3}\pi\, MB^2 \times B'C'$$

Inhoud Polygoonsector



Gelijk aan $I(MACDB) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \times A'B'$

$$I(MAC) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \times A'C'$$
$$I(MCD) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \times C'D'$$
$$I(MDB) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \times D'B'$$

$$I(\text{polygoonsector}) = \tfrac{2}{3}\pi r^2 \times A'B'$$

Inhoud bolsector.

Wordt het aantal deelen waarin AB verdeeld is grooter dan nadert de inhoud tot

I(cirkelsector M AB)

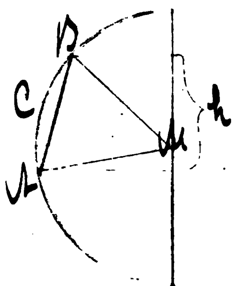
waarvan men dus vindt!

$$\tfrac{2}{3}\pi R^2 \times A'B'$$
$$\tfrac{2}{3}\pi R^2 \times h$$

Een bijzonder geval is dat de sector sluit aan de as en dus bij wenteling geeft een bolsector. Voor den bolsector geldt dus dezelfde formule $\tfrac{2}{3}\pi R^2 \times h$. Wordt de sector de halve cirkel dan krijgt men

$$I\ \underline{\text{bol}} = \tfrac{2}{3}\pi R^2 \times 2R$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

Inhoud bolschil



$I(\text{segm. } ACB) =$

$I(\text{sect. } MACB) - I(\Delta MAB)$

$I(\text{sect. } MACB) = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

$I(\Delta MAB) = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ af

$I(\text{segm } ACB) = \frac{2}{3}\pi h (R^2 - r^2)$

$= \frac{2}{3}\pi h \times \frac{1}{4} k^2$

$= \frac{1}{6}\pi k^2 h$

Van bolschijf die
" bolsegm. die

I bolsector $= I$ (cirkelsector) $= \frac{2}{3}\pi R^2 h$

I bol $= \frac{4}{3}\pi R^3$

I bolschil $= I$ (cirkelsegment) $= \frac{1}{6}\pi k^2 h$

I bolschijf $= \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{2}\pi r_1^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$

I bolsegment $= \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$

Ander Bewijs van de inhoud van het wentelinglichaam van een driehoek, die een

Zij $\triangle ABC$ de driehoek die wentelt om de as PQ; B en C beschrijven cirkelomtrekken die de loodlijnen BB' en CC' op de as als straal hebben en C' en B' tot middelpunt.
De gevraagde inhoud kan dan gesteld en afgeleid worden verkregen uit twee kegels en een afgeknotte kegel in onze figuur is:

$I(ABC)$ = kegel ABB' + afgekn. kegel [illegible] − kegel [illegible]

Vervangt men nu de [illegible] door regelmatige veelhoeken met hetzelfde aantal zijden [illegible] evenwijdig geplaatst, waardoor de kegels in regelm. pyramiden veranderen.

n afgekn. kegel in een afgekn. pyramide)
een opeenvolging / een lichaam ontstaan
de middelpunten van 2 grondvlakken
worden ... ...
...
... ... corresp.
... zijden van ... in
omgeschreven regelm. n-hoeken dus
$\triangle B'QQ'$ en $\triangle C'TT'$ corresponderende
middelpunts-hoeken welke loodrecht
op de as ... zijn geplaatst dan is
Omdat ... $\angle BB'Q = \angle CC'T = 180/n$
$B'Q$ evenwijdig aan $C'T$ & liggen ...
met ... in hetzelfde vlak (meridiaan
vlak)
Op dezelfde wijze blijkt dat Q' en T'
in het algemeen elk paar corr.
hoekpunten in hetzelfde meridiaan
vlak liggen.
Deze n meridiaanvlakken ...
verdeelen het lichaam in even
zoveele n zijdige pyramiden (in
een enkel geval 3 zijdige) die
de verschillende zijden van den
afgeknotte pyramide tot grondvlak
en ... tot gemeenschappelijke top hebben.
Bovendien is het duidelijk dat de
wording van elk dier pyramiden
aangegeven wordt door de koppeling
... $\triangle MRCZ$ (immers elk
meridiaanvlak staat ⊥ op het bij-
behoorend zijvlak van de

afgeknotte piramide
Het inhoud van elke piramide
is dus gelijk aan 1/3 AD x opp.
bijbehorend afgeknotte piramide
Dus inhoud van het geheel lichaam
~~J(ABC) = limiet~~
1/3 AD x geheel bijdelingsch opp. afgekn. pyr.
J(ABC) = limiet waarheen die
inhoud nadert dus:
J(ABC) = 1/3 AD bijdelingsch. opp. afgekn. kegel
= 1/3 AD x O(ABC).

de afgekn. kegel is een afgek
ken [illegible] een lichaam
die ontstaat bij het [illegible]
worden van [illegible] n der [illegible]
[illegible] (MBC) [illegible]
[illegible] BB' en CC' twee cor
respondeerende zijden van tweede
ongeschreven regelm. n-h
Δ BQQ' en Δ C'TT' [illegible]
middelpunt [illegible] welk
op de as PQ zijn gelegen.
Omdat bovendien ∠ BB'Q =
B'Q evenwijdig aan C'F [illegible]
met PQ in hetzelfde vl[illegible]
vlak)
Op dezelfde wijze blijkt dat
in het algemeen elk [illegible]
hoekpunten in hetzelfde
vlak liggen.
Deze n meridiaanvla[illegible]
verdeelen het lichaam
in [illegible] gelijke [illegible]
Een enkel geval [illegible]
de verschillende zijden [illegible]
afgeknotte pyramide
en [illegible]
toevoeging is het duidel[illegible]
vorm van elk der [illegible]
aangegeven wordt door
ABC van Δ MBCB [illegible] immer
meridiaanvlak [illegible] Dat [illegible]
behoorende zijvlak van

af...
Die inhoud van elke piramide is dus gelijk aan $\frac{1}{3}$ AD x opp. bijbehorende ... afgekn. piramide
Dus inhoud van het geheele lichaam
~~I(ABC) limiet~~
$\frac{1}{3}$ AD x geheel bijdelingsch opp. afgekn. pyr.
I(ABC) = limiet waartoe die inhoud nadert dus:
I(ABC) = $\frac{1}{3}$ AD bijdelingsch. opp. afgekn. kegel
= $\frac{1}{3}$ AD x O(ABC).

I (sector M A C B) $= \frac{1}{3} R \times$ het deel van het boloppervlak, gelegen tusschen de cirkels $A A_1$ en $B B_1$,

$= \frac{1}{3} R \times$ het bolvormig oppervlak van de bolschijf $A B B_1 A_1$,

$$= \frac{1}{3} R \times 2 \pi R \times O O_1 = \frac{2}{3} \pi R^2 \times O O_1 \; . \; . \; . \quad (2)$$

Verder is volgens N⁰ 499, als $M D \perp A B$ getrokken wordt,

I ($\triangle$ M A B) $= \frac{1}{3} M D \times$ het oppervlak, door A B beschreven (3)

terwijl het oppervlak, door A B beschreven, dat van den afgeknotten kegel $A B B_1 A_1$ is; dus is volgens N⁰ 487

$$O(A B) = 2 \pi M D \times O O_1,$$

derhalve door substitutie in (3)

$$I(\triangle\, M A B) = \tfrac{1}{3}\, 2 \pi M D^2 \times O O_1.$$

Trekt men deze uitkomst van de vergelijking (2) af en neemt daarbij de formule (1) in aanmerking, dan wordt

$$\begin{aligned} I(\text{segment } A C D) &= \tfrac{1}{3}\, 2 \pi R^2 \times O O_1 - \tfrac{1}{3}\, 2 \pi M D^2 \times O O_1, \\ &= \tfrac{1}{3}\, 2 \pi\, O O_1 (R^2 - M D^2), \\ &= \tfrac{1}{3}\, 2 \pi\, O O_1 \times A D^2, \end{aligned}$$

of, daar $A D = \frac{1}{2} A B$ is,

$$I(\text{segment } A C D) = \tfrac{1}{6} \pi\, O O_1 \times A B^2.$$

Stelt men de koorde A B door k en de projectie van die koorde op P Q door h voor, dan is

$$I(\text{segment } A C D) = \tfrac{1}{6} \pi h k^2.$$

260. Eindelijk berekenen wij nu opnieuw den inhoud eener bolschijf $A B B_1 A_1$ door deze te beschouwen als de som van den afgeknotten kegel $A B B_1 A_1$ en het zooeven onderzochte ringvormige lichaam, dat door de wenteling van het cirkelsegment A C B ontstaat.

Duidt men weder A O en B P met r en r_1 aan, en O P met h, dan is dus

$$I \text{ bolschijf} = \tfrac{1}{3} \pi h (r^2 + r_1^2 + r r_1) + \tfrac{1}{6} \pi h \times A B^2 \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Trekt men echter uit B een loodlijn B D op A O, dan is

Fig. 470.

$$AD = AO - DO = AO - BP = r - r_1,$$

en dus is in $\triangle$ BAD

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (r - r_1)^2 + h^2.$$

Substitueert men deze uitkomst in (1) dan wordt

$$\text{Inh. bolschijf} = \tfrac{1}{3}\pi h (r^2 + r_1^2 + r r_1) + \tfrac{1}{6}\pi h (r^2 - 2 r r_1 + r_1^2 + h^2),$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi h (2 r^2 + 2 r_1^2 + 2 r r_1 + r^2 - 2 r r_1 + r_1^2 + h^2),$$
$$= \pi \tfrac{1}{6} h (3 r^2 + 3 r_1^2 + h^2),$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi r^2 h + \tfrac{1}{2}\pi r_1^2 h + \tfrac{1}{6}\pi h^3,$$

evenals in N^0 495 uitgesproken is.

Vraagstukken.

989. Een gelijkzijdige driehoek wentelt om een rechte, door een der hoekpunten van den driehoek evenwijdig aan de overstaande zijde getrokken. Hoe groot is de inhoud van het omwentelingslichaam, dat daardoor ontstaat, als de zijde van den zeshoek 8 cM. bedraagt?

990. De inhoud van het lichaam, beschreven door een driehoek, die wentelt om een rechte, door een der hoekpunten evenwijdig aan de overstaande zijde getrokken, is gelijk aan $^2/_3$ van den cylinder, waarvan het ronde oppervlak door die overstaande zijde beschreven wordt.

991. De inhoud van het omwentelingslichaam, beschreven door een willekeurig deel van een regelmatigen veelhoek, dat om een middellijn van den omgeschreven cirkel wentelt, is gelijk aan een derde deel van het product van den straal van den ingeschreven cirkel van den veelhoek met het oppervlak, door de wentelende gebroken lijn beschreven.

992. Bepaal den inhoud van het omwentelingslichaam, beschreven door drie opeenvolgende middelpuntsdriehoeken van een regelmatigen tienhoek, die om een der begrenzende stralen wentelen, indien deze straal 4 cM. lang is.

993. Bepaal den inhoud van het omwentelingslichaam, dat ontstaat, als een regelmatige achthoek, waarvan de zijde a is, om een zijner zijden wentelt.

994. Een cirkelsegment, welks boog 45° bevat, behoorende tot een cirkel, met een straal van 8 cM. beschreven, wentelt om de middellijn, door een der uiteinden van de koorde gaande. Bepaal den inhoud van het omwentelingslichaam.

995. Als een cirkelsegment, welks boog 90° bevat, wentelt om een middellijn, die met een der stralen naar de uiteinden der koorde getrokken, een hoek van 60° vormt, hoe groot is dan de inhoud van het door het segment beschreven omwentelingslichaam, uitgedrukt in den straal r van den cirkel?

996. Een cirkelsegment, welks boog 90° bevat, wentelt om een middellijn van den cirkel, die met de koorde van het segment een hoek van 36° vormt. Hoe groot is de inhoud van het omwentelingslichaam, door het segment beschreven, als de straal van den cirkel 2 dM. is?

Herhaling.

997. De inhoud van een gelijkzijdigen cylinder, in een bol beschreven, is middelevenredig tusschen de inhouden van den bol en van den ingeschreven gelijkzijdigen kegel.

Een cylinder en een kegel heeten gelijkzijdig, als de asdoorsneden respectievelijk een vierkant en een gelijkzijdige driehoek zijn.

998. De inhoud van het lichaam, begrensd door twee concentrische bolopppervlakken, is gelijk aan het viervoud van den afgeknotten kegel, die het verschil der stralen tot hoogte en een grooten cirkel van elk der bollen respectievelijk tot grond- en bovenvlak heeft.

999. Hoe groot is de hoek van den cirkelsector, die ontstaat, als men het zijdelingsch oppervlak van een kegel (straal grondvlak $= r$, hoogte h) in een plat vlak uitgespreid denkt.

1000. In een afgeknotten kegel, waarvan de straal van het grondvlak R en die van het bovenvlak r is, wordt een bol beschreven. Hoe groot is de inhoud van dien bol? (Eindex. h. b. s., 1865, Zuid-Holland.)

1001. In een rechten kegel, waarvan de schuine zijde a palmen en de straal van het grondvlak b palmen bedraagt, is een bol beschreven. Men vraagt het oppervlak van het bolvormig segment, dat boven den aanrakingscirkel is gelegen. (Eindex. h. b. s., 1866, Zuid-Holland.)

1002. In een rechten cirkelvormigen kegel heeft men een bol beschreven, die het grondvlak en het ronde oppervlak van den kegel raakt. Men begeert den inhoud van een tweeden bol te vinden, die den eersten bol en het ronde oppervlak van den kegel raakt, als gegeven zijn de straal van het grondvlak $= 12$ en de schuine zijde $= 15$ cM. (Eindex. h. b. s., 1866, Gelderland.)

1003. Zoek de oppervlakte en den inhoud van een kubus, die met een der zijvlakken in het grondvlak en met de hoekpunten van het

overstaande vlak in het ronde oppervlak van een kegel ligt, waarvan gegeven is de schuine zijde 9 en de straal van het grondvlak 3 duim. (Eindex. h. b. s., 1866, Gelderland.)

1004. Van een bol, wiens straal R gegeven is, heeft men een bolvormig segment afgesneden, welks pijl h is. Druk in deze gegevens de hoogte uit van een afgeknotten kegel, die op het grondvlak van dit segment staat en daarmede dezelfde oppervlakte heeft. (Eindex. h. b. s., 1866, Gelderland.)

1005. In een bolvormig segment is een kegel beschreven. Men vraagt de verhouding tusschen de ronde oppervlakken dezer twee lichamen. (Eindex. h. b. s. 1867, Zuid-Holland.) (Gegeven: de straal van den bol $= R$ en de hoogte van het segment $= h$.)

1006. De formule te vinden voor het oppervlak van een bolvormige schijf, als de stralen van het grond- en bovenvlak zijn R en r en de hoogte $= h$. (Eindex. h. b. s., 1867, Zuid-Holland.)

1007. De straal te berekenen van den bol, die in een gegeven bolvormigen sector kan beschreven worden. (Eindex. h. b. s., 1867, Zuid-Holland.)

1008. Van een regelmatigen tienhoek laat men om zijn tweede diagonaal (de koorde, die van den omgeschreven cirkel een boog van 108° onderspant) het kleinste gedeelte omwentelen. Men vraagt naar den inhoud van het omwentelingslichaam, als de zijde van den tienhoek gegeven is. (Eindex. h. b. s., 1867, Noord-Holland.)

1009. Een rechthoekig trapezium, waarvan de evenwijdige zijden a en $2a$ zijn en welks hoogte h is, wentelt om zijn schuine zijde; men vraagt naar den inhoud van het omwentelingslichaam. (Eindex. h. b. s., 1867, Noord-Holland.)

1010. In een bol met den straal R is een kegel beschreven, die denzelfden inhoud heeft als het segment, dat aan het grondvlak van den kegel grenst. Welke hoogte heeft dit segment? (Eindex. h. b. s., 1867, Noord-Holland.)

1011. Bepaal de hoogte van het bolsegment, behoorende tot den bolsector, waarvan het geheele oppervlak a^2 is, als de straal van den bol R is. (Eindex. h. b. s., 1867, Utrecht.)

1012. Bereken den inhoud van het lichaam, voortgebracht door de omwenteling van een cirkelsegment om een middellijn, die door het uiteinde van den boog gaat, wanneer gegeven is, dat de koorde van het segment de zijde is van den ingeschreven regelmatigen tienhoek. (Eindex. h. b. s., 1867, Overijsel.) (De straal van den cirkel is r.)

1013. Een driehoek, wiens zijden 26, 28 en 30 Ned. duim zijn, wentelt om een as, evenwijdig aan en op een afstand van 8 Ned. duim van de langste zijde. Hoe groot is dan de inhoud van het door

omwenteling ontstane ringvormige lichaam? (Eindex. h. b. s., 1867, Groningen.)

1014. Een cirkelsegment, waarvan de projectie van den boog op een as 6 duim is, terwijl de uiteinden der koorde 14 en 21 duim van genoemde as verwijderd zijn, wordt om die as gewenteld; men vraagt den inhoud, welke door die omwenteling ontstaat. (Eindex. h. b. s., 1867, Groningen.)

Weggelaten is hier, dat de as een middellijn is van den cirkel, waartoe het segment behoort. Hoe groot is dan de straal van dien cirkel?

HOOFDSTUK XLVI.

DE BOLTWEEHOEK EN DE BOLDRIEHOEK.

261. Het deel van een boloppervlak, begrensd door twee halve groote cirkels van een bol, die de eindpunten gemeen hebben, heet **boltweehoek**.

De halve groote cirkels heeten de **zijden** en de hoeken, die deze insluiten, heeten de **hoeken van den boltweehoek**.

De snijpunten der zijden worden de **hoekpunten** genoemd.

Een boltweehoek wordt genoemd met vier letters, waarvan de beide middelste bij de hoekpunten geplaatst zijn, terwijl elk der uiterste letters bij een der zijden zich bevindt. In fig. 471 spreekt men dus van den boltweehoek B A A′ C.

Eigenschap 502. *De twee hoeken van een boltweehoek zijn gelijk.*

In fig. 471 moet dus bewezen worden, dat $\angle$ B A C = $\angle$ B A′ C is.

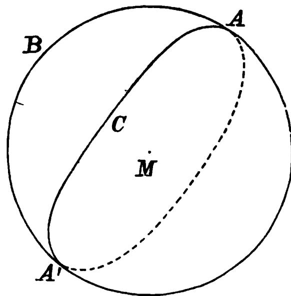


Fig. 471.

Bewijs: Volgens N⁰ 470 is elk der hoeken B A C en B A′ C een standhoek van den tweevlakshoek tusschen de vlakken der cirkels A B A′ en A C A′; dus zijn de hoeken gelijk.

Ten einde twee willekeurige boltweehoeken met elkander te vergelijken, heeft men te voren drie stellingen te bewijzen, die een volkomen overeenstemming vertoonen met bekende stellingen in de planimetrie en dan ook op dezelfde wijze afgeleid worden. Wij deelen daarom hier die eigenschappen zonder bewijs mede:

Eigenschap 503. *Twee boltweehoeken op één bol zijn gelijk, d. w. z. de eene kan den anderen volkomen bedekken, als hunne hoeken gelijk zijn.*

Eigenschap 504. *Als twee boltweehoeken op één bol ongelijk zijn, dan zijn ook hunne hoeken ongelijk en die boltweehoek is de grootste, bij welken de grootste hoek behoort.*

Eigenschap 505. *Twee boltweehoeken op één bol zijn evenredig met hunne hoeken.*

De laatste eigenschap stelt ons nu onmiddellijk in staat het oppervlak van een boltweehoek te berekenen.

Vergelijkt men namelijk een boltweehoek met een halven bol, die als een boltweehoek met een gestrekten hoek kan beschouwd worden, dan is volgens N° 505, als α elk der hoeken van den boltweehoek voorstelt,

$$\text{Opp. boltweehoek} : \text{Opp. halve bol} = \alpha^\circ : 180^\circ.$$

Hieruit volgt dus:

Eigenschap 506. *Het oppervlak van een boltweehoek, wiens hoeken elk* α° *bedragen, is* $\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \times$ *het oppervlak van den bol.*

262. Het lichaam, dat uit een bol gesneden wordt door twee door het middelpunt gaande platte vlakken, die door hun snijlijn heen niet verlengd zijn, heet tweevlakkige bolsector. Het wordt door twee platte vlakken en een boltweehoek begrensd.

De hoeken van dien boltweehoek worden ook de hoeken van den tweevlakkigen bolsector genoemd.

Men ziet onmiddellijk in, dat de stellingen 503—505 ook voor een tweevlakkigen bolsector moeten gelden, waaruit men dan besluit tot

Eigenschap 507. *De inhoud van een tweevlakkigen bolsector, wiens hoeken elk* α° *bedragen, is* $\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \times$ *de inhoud van den bol.*

263. Een deel van een bolppervlak, dat begrensd wordt door drie bogen van *groote* cirkels op een bol, die niet door hunne snijpunten heen verlengd zijn, heet boldriehoek.

De bogen van de groote cirkels heeten de zijden van den boldriehoek; deze worden dus in graden uitgedrukt.

De hoeken, die elk paar zijden vormen, heeten de hoeken van den boldriehoek.

Eindelijk is elk snijpunt van twee zijden een hoekpunt van den boldriehoek.

Zijden en hoeken heeten de elementen.

Een boldriehoek wordt genoemd met drie letters, bij de hoekpunten geplaatst.

Een boldriehoek met twee gelijke zijden heet gelijkbeenig; zijn alle zijden gelijk, dan noemt men den driehoek gelijkzijdig.

Is een der hoeken van een boldriehoek recht, dan wordt deze rechthoekig genoemd. Hierbij spreekt men ook van de rechthoekszijden en de hypothenusa.

Volgens N° 465 hebben twee groote cirkels op een bol twee punten gemeen, die op een middellijn liggen. Zijn (fig. 472) op den bol de drie groote cirkels P Q, R S, T U getrokken, dan snijden zij elkander aan de voorzijde in de drie punten A, B, C, en aan de achterzijde in de drie tegenovergelegen punten A', B', C', terwijl de lijnen A A', B B', C C' middellijnen van den bol zijn.

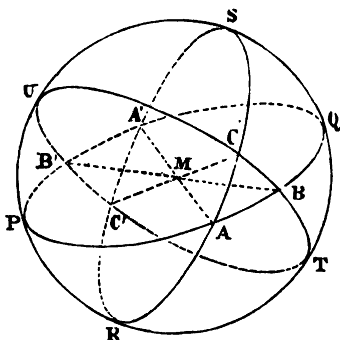


Fig. 472.

Het bolvormig oppervlak is nu in acht deelen verdeeld, namelijk:

1°. de bolvormige driehoek A B C, die geheel aan de voorzijde van den bol ligt;

2°. drie driehoeken, die ieder een zijde met den voorgaanden gemeen hebben en wier toppen aan de achterzijde liggen, namelijk:

A B C', A B' C, A' B C;

3°. drie driehoeken, die ieder een hoekpunt met den eersten gemeen hebben, terwijl de overstaande zijden aan den achterkant vallen, nl.:

A B' C', A' B C', A' B' C;

4°. een driehoek, die geheel aan de achterzijde van den bol ligt, nl. A' B' C'.

De sub 2° genoemde driehoeken heeten de nevendriehoeken van △ A B C; elk dezer heeft met △ A B C één zijde gemeen, terwijl de beide andere zijden in de verlengden van twee zijden van △ A B C liggen.

Een boldriehoek en zijn nevendriehoek vormen samen een boltweehoek.

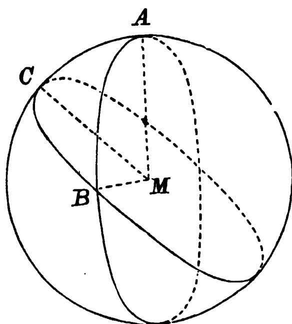


Fig. 473.

De sub 3° genoemde driehoeken worden topdriehoeken van △ A B C genoemd, en eindelijk heet △ A' B' C' in fig. 461, de tegendriehoek van △ A B C.

Wij beschouwen in het vervolg alleen boldriehoeken, die geen inspringende zijden bezitten.

264. Wanneer men de vlakken, waarin de drie zijden van den boldriehoek A B C liggen, aangebracht denkt, dan ontstaat een drievlakshoek M A B C en men ziet

onmiddellijk in, dat de zijden van dezen drievlakshoek met de zijden van den boldriehoek in grootte overeenstemmen. Maar ook de hoeken dier beide figuren stemmen volgens N° 470 twee aan twee overeen.

Hieruit volgt nu, dat de eigenschappen der zijden en hoeken van een boldriehoek met die der overeenkomstige elementen van een drievlakshoek overeenstemmen moeten, zoodat die eigenschappen onmiddellijk aan Hoofdstuk XXXIII ontleend kunnen worden.

Het is echter van belang de eigenschappen van een boldriehoek onafhankelijk van die van den drievlakshoek af te leiden, waartoe wij nu overgaan.

265. **Eigenschap 508.** *De som der hoeken van een boldriehoek is grooter dan een gestrekte hoek.*

Bewijs: Beschouwen wij den boldriehoek A B C. Bij elk zijner hoeken behoort dan een boltweehoek, en op deze figuren passen wij nu N° 506 toe; zoodoende vindt men:

∟ C A B : 180° = de boltweeh. Q A A′ S : : den halven bol,

∟ A B C : 180° = de boltweeh. P B B′ U : : den halven bol.

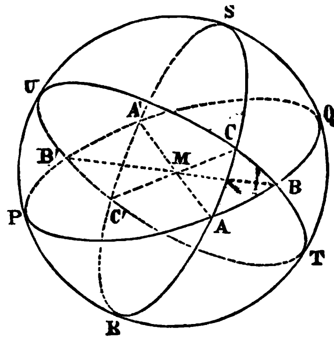


Fig. 472.

In plaats van den derden hoek B C A van den boldriehoek nemen wij den overstaanden S C U, die daaraan gelijk is, en den daarbij behoorenden boltweehoek S C C′ U. Dan is dus ook

∟ B C A : 180° = de boltweeh. S C C′ U : : den halven bol.

Uit deze drie evenredigheden volgt nu

(∟ C A B + ∟ A B C + ∟ B C A) : 180° =
de figuur (Q A A′ S + P B B′ U + S C C′ U) : den halven bol.

Maar de drie boltweehoeken, die in den derden term dezer evenredigheid voorkomen, vormen te zamen den halven bol, die aan dezelfde zijde van den grooten cirkel A B ligt als de boldriehoek A B C, vermeerderd met △ A B C en △ A′ B′ C′. Derhalve wordt de vorige evenredigheid.

de som der hoeken : 180° =
(de halve bol + △ A B C + △ A′ B′ C′) : den halven bol . (1)

en aangezien de verhouding in het tweede lid grooter dan de eenheid is, moet hetzelfde met die in het eerste lid het geval zijn, derhalve

de som der hoeken > 180°.

Uit deze eigenschap volgt nu weder onmiddellijk evenals bij den drievlakshoek:

Eigenschap 509. ***Het supplement van een der hoeken van een boldriehoek is kleiner dan de som der beide andere hoeken.***

Verder bewijzen wij

Eigenschap 510. ***Het supplement van een der hoeken van een boldriehoek is grooter dan het verschil der beide andere hoeken.***

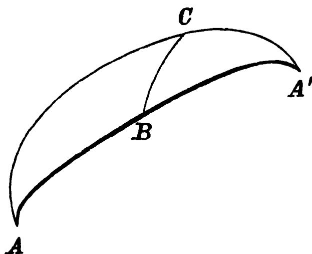


Fig. 474.

Bewijs: Zij A B C de boldriehoek, waarbij een nevendriehoek A′B C geconstrueerd is. Passen wij nu N° 508 op dezen nevendriehoek toe, dan is

$$\angle BA'C + \angle A'BC + \angle BCA' > 180°.$$

Maar, daar een boldriehoek en een zijner nevendriehoeken samen een boltweehoek vormen, is volgens N° 502

$$\angle BA'C = \angle BAC.$$

Verder is $\angle A'BC = 180° - \angle ABC$, $\angle BCA' = 180° - \angle BCA$,

dus wordt de vorige ongelijkheid

$$\angle BAC + 180° - \angle ABC + 180° - \angle BCA > 180°,$$

of

$$180° - \angle BCA > \angle ABC - \angle BAC.$$

266. In § 243 is uitgelegd, wat men verstaat onder de polen van een cirkel op den bol.

Elke zijde van een boldriehoek heeft twee polen, die ter weerszijden liggen van het vlak, waarin die zijde ligt.

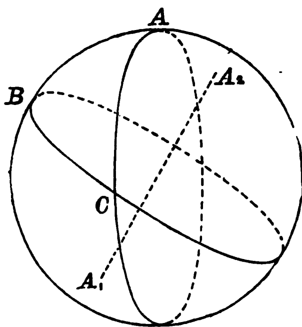


Fig. 475.

Zoo behooren b. v. in fig. 475 bij de zijde B C de polen A_1 en A_2.

In het vervolg zullen wij uit deze polen een keuze doen en wel zullen wij steeds van deze twee polen slechts die beschouwen, welke niet aan denzelfden kant ligt van die zijde, als het tegenover haar gelegen hoekpunt van den boldriehoek.

In fig. 475 liggen b.v. A_2 en A aan denzelfden kant van B C, maar A_1 en A aan tegengestelde kanten. Daarom zullen wij alleen het punt A_1 de pool van B C noemen.

Denkt men op deze wijze de pool van elk der zijden van den boldriehoek bepaald en de drie aldus verkregen punten A_1, B_1, C_1, op den bol, twee aan twee, door groote cirkels verbonden, dan is een nieuwe boldriehoek ontstaan, die de pooldriehoek van den eersten genoemd wordt.

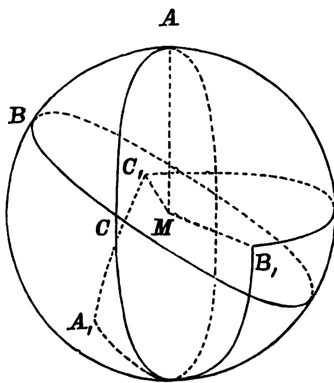


Fig. 476.

In fig. 476 is de oorspronkelijke driehoek met A B C, de pooldriehoek met $A_1 B_1 C_1$ aangeduid, waarbij men zich voor te stellen heeft, dat de punten A_1 en C_1 aan de achterzijde van den bol gelegen zijn, daarentegen B_1 aan de voorzijde.

Eigenschap 511. *De hoekpunten van den oorspronkelijken boldriehoek zijn de polen van de zijden van den pooldriehoek, m. a. w. de oorspronkelijke driehoek is de pooldriehoek van den pooldriehoek.*

Bewijs: Zij A B C de boldriehoek, $A_1 B_1 C_1$ de pooldriehoek als hierboven bepaald. Ten einde het bewijs te leveren, maken wij gebruik van N^0 469 en van de omgekeerde eigenschap N^0 469*. Volgens N^0 469 is nu A_1 van alle punten van den boog B C 90° verwijderd en evenzoo is B_1 van alle punten van den boog C A 90° verwijderd. De bogen C A_1 en C B_1 zijn dus 90°, zoodat C volgens N^0 469* de pool van den boog $A_1 B_1$ is. Bovendien blijkt uit de figuur dadelijk, dat C en het hoekpunt C_1 van $\Delta A_1 B_1 C_1$ aan tegengestelde kanten van de zijde $A_1 B_1$ liggen, waardoor de eigenschap bewezen is.

Eigenschap 512. *De zijden van den pooldriehoek zijn de supplementen van de hoeken van den boldriehoek.*

Bewijs: Zijn in fig. 477 de boldriehoek en diens pooldriehoek weder met A B C en $A_1 B_1 C_1$ aangeduid, evenals hierboven bepaald, dan moet bewezen worden

$$\text{bg. } B_1 D' C_1 + \llcorner BAC = 180°.$$

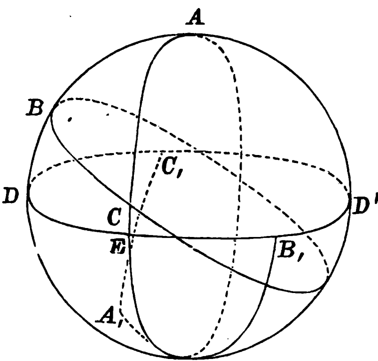


Fig. 477.

Verlengt men de zijde $B_1 C_1$ tot zij de groote cirkels A B en A C in D en E snijdt, dan is volgens N^0 471

$$\llcorner BAC = \text{bg. } DE,$$

dus blijft nog te bewijzen

$$\text{bg.} B_1 D' C_1 + \text{bg.} DE = 180°.$$

Daar C_1 en B_1 de polen van de bogen AB en AC zijn, moet

$$\text{bg.} C_1 D = 90° \text{ en bg.} B_1 E = 90° \text{ zijn.}$$

Door optelling dezer twee vergelijkingen vindt men

$$\text{bg.}\ C_1 D + \text{bg.} B_1 E = 180°$$

en omdat

$$\text{bg.} C_1 D + \text{bg.} DE + \text{bg.} EB_1 + \text{bg.} B_1 D' C_1 = 360°$$

is, wordt dus ook

$$\text{bg.} DE + \text{bg.} B_1 D' C_1 = 180°$$

wat te bewijzen was.

Eigenschap 513. *De hoeken van den pooldriehoek zijn de supplementen van de zijden van den boldriehoek.*

Bewijs: Beschouwt men volgens N° 511 den boldriehoek als den pooldriehoek van zijn pooldriehoek, dan volgt de eigenschap onmiddellijk uit N° 512.

267. **Eigenschap 514.** *De som der zijden van een boldriehoek is kleiner dan twee gestrekte hoeken.*

Bewijs: Duidt men de zijden van den boldriehoek met a, b, c en de hoeken van den pooldriehoek met A_p, B_p, C_p, aan, zoodat

$$a + A_p = 180°,\ b + B_p = 180°,\ c + C_p = 180°$$

is, en past men nu N° 508 op den pooldriehoek toe, dan ontstaat

$$A_p + B_p + C_p > 180°.$$

Hieruit volgt dus

$$(180° - a) + (180° - b) + (180° - c) > 180°,$$

of

$$a + b + c < 360°.$$

Eigenschap 515. *De som van twee zijden van een boldriehoek is grooter dan de derde zijde.*

Bewijs: Construeert men een nevendriehoek van $\triangle$ ABC, en duidt men BC, CA, AB respectievelijk met a, b, c aan, dan is

$$A'C = 180° - b,\ A'B = 180° - c.$$

Volgens N° 514, toegepast op den driehoek A'BC, is nu

$$A'C + A'B + BC < 360°,$$

dus

$$180° - b + 180° - c + a < 360°,$$

of na vereenvoudiging

$$a < b + c.$$

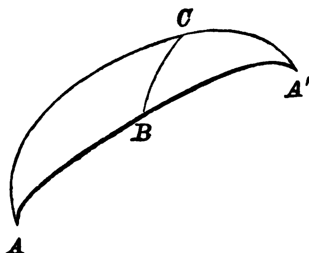


Fig. 474.

268. Wij zullen nu een boldriehoek en zijn tegendriehoek nader beschouwen.

Onderstellen wij daartoe, dat deze in Fig. 478 door $\triangle$ A B C en $\triangle$ $A_1 B_1 C_1$ voorgesteld worden.

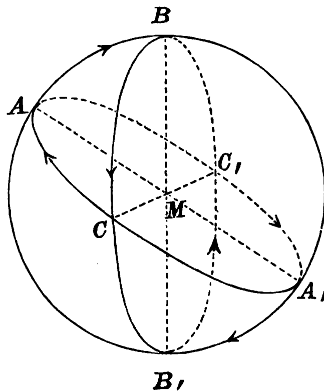


Fig. 478.

Allereerst is duidelijk, dat elk element van den eenen driehoek gelijk is aan een element van den anderen. Zoo is b. v.

$$BC = B_1 C_1,$$

en

$$\llcorner\, ABC = \llcorner\, A_1 B_1 C_1,$$

omdat de raaklijnen, in B aan de cirkels B A en B C getrokken, evenwijdig loopen met de raaklijnen, in B_1 aan de cirkels $B_1 A_1$ en $B_1 C_1$, terwijl bovendien de richtingen van elk paar raaklijnen tegengesteld zijn.

Beschouwt men echter beide op dezelfde wijze, b. v. buiten den bol staande naar elk der driehoeken ziende, dan blijkt, dat de volgorde, waarin de gelijke elementen op elkander volgen, in twee figuren niet dezelfde is.

Voor den beschouwer van $\triangle$ A B C volgen de zijden A B, B C, C A op elkander in dezelfde richting, waarin de wijzers van een uurwerk, op het boloppervlak in $\triangle$ A B C neergelegd, rondloopen; voor den beschouwer van $\triangle$ $A_1 B_1 C_1$ daarentegen volgen de zijden $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ in de tegengestelde richting op elkander.

Als gevolg hiervan hebben wij dus

Eigenschap 516. *Een boldriehoek en zijn tegendriehoek zijn niet congruent, maar symmetrisch.*

Inderdaad ziet men gemakkelijk in, dat het onmogelijk is, den driehoek $A_1 B_1 C_1$ zóó over het bolopppervlak te verplaatsen, dat deze $\triangle$ A B C gaat bedekken. Daartoe toch zou allereerst noodig zijn, $\triangle$ $A_1 B_1 C_1$ over het bolopppervlak te schuiven, totdat B_1 aan dezelfde zijde van $A_1 C_1$ kwam te liggen, als B ten opzichte van A C. Indien men daarna den hoek $A_1 B_1 C_1$ met A B C tot samenvalling brengt, zal $B_1 C_1$ niet op de daaraan gelijke zijde B C, maar op B A kome en evenzoo $B_1 A_1$ op B C.

Eigenschap 517. *Een gelijkbeenige boldriehoek is congruent zijn tegendriehoek.*

Bewijs: Is namelijk in fig. 478 gegeven, dat bg. B A = b is, dan blijkt onmiddellijk, dat ook elk dezer bogen gelijk bg. $B_1 A_1$ en bg. $B_1 C_1$.

Wanneer men nu tracht $\triangle A_1 B_1 C_1$ op de zooeven beschreven wijze met $\triangle ABC$ te doen samenvallen, door $\angle A_1 B_1 C_1$ op $\angle ABC$ te plaatsen, zoodat B_1 in B en verder $B_1 C_1$ op B A en $B_1 A_1$ op B C valt, dan zullen de punten C_1 en A_1 respectievelijk op A en C moeten vallen, omdat nu

$$\text{bg. } B_1 C_1 = \text{bg. } BA \text{ en bg. } B_1 A_1 = \text{bg. } BC$$

is. De driehoeken bedekken elkander dus volkomen.

269. Met behulp van de beschouwingen der voorgaande § kan men nu ook bewijzen:

Eigenschap 518. *In een gelijkbeenigen boldriehoek zijn de hoeken aan de basis gelijk.*

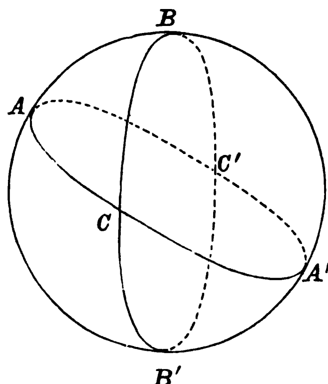


Fig. 479.

Gegeven:

$$\text{bg. } AB = \text{bg. } BC.$$

Te bewijzen:

$$\angle ACB = \angle BAC.$$

Bewijs: Zooeven is bewezen, dat men den $\triangle A'B'C'$ zoodanig over het bolopppervlak kan verschuiven, dat $\angle B'A'C'$ den hoek B C A volkomen gaat bedekken. Dus is

$$\angle B'A'C' = \angle BCA.$$

Maar in elk geval is ook volgens het begin van § 268

$$\angle B'A'C' = \angle BAC,$$

dus is ook

$$\angle BCA = \angle BAC.$$

Eigenschap 519. *Als in een boldriehoek een zijde grooter is dan een andere, ligt over de grootste zijde ook de grootste hoek.*

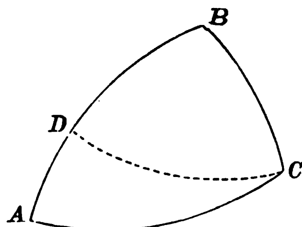


Fig. 480.

Gegeven:

$$\text{bg. } AB > \text{bg. } BC.$$

Te bewijzen:

$$\angle ACB > \angle BAC.$$

Bewijs: Omdat bg. A B > bg. B C is, kan men steeds op bg. A B een stuk B D nemen, dat gelijk is aan bg. B C, terwijl D tusschen A en B valt. Brengt men nu een grooten cirkel door C en D, dan is $\angle BDC$ het supple-

ment van een der hoeken van $\triangle ACD$. Derhalve heeft men volgens N⁰ 510

$$\angle BDC > \angle BAC - \angle DCA.$$

Maar, omdat in $\triangle BDC$ bg. $BD =$ bg. BC is, zal ook

$$\angle BDC = \angle BCD$$

zijn, dus wordt de vorige vergelijking

$$\angle BCD > \angle BAC - \angle DCA,$$

of

$$\angle BCD + \angle DCA > \angle BAC,$$

dus eindelijk

$$\angle BCA > \angle BAC.$$

De omgekeerden der eigenschappen 518 en 519 kunnen nu indirect bewezen worden, evenals de overeenkomstige eigenschappen voor den vlakken driehoek.

Ten slotte is het duidelijk, dat, nu N⁰ 519 bewezen is, ook de eigenschap, dat de som van twee zijden van een boldriehoek grooter is dan de derde zijde, op dezelfde wijze bewezen kan worden, als de gelijkluidende eigenschap voor den vlakken driehoek, door namelijk op het verlengde van een dier twee zijden een boog aan te nemen gelijk aan de andere en het eindpunt van den aldus verkregen boog met een hoekpunt van den driehoek te verbinden. Wij laten de uitwerking hiervan aan den lezer over.

270. **Eigenschap 520.** ***Een boldriehoek en zijn tegendriehoek hebben gelijke oppervlakken.***

Bewijs: In § 268 zagen wij reeds, dat een boldriehoek en zijn tegendriehoek in het algemeen niet congruent zijn, maar dat de congruentie tusschen die figuren wel bestaat, indien de boldriehoek gelijkbeenig is.

Ten einde nu te bewijzen, dat een willekeurige boldriehoek en zijn tegendriehoek toch gelijke oppervlakken hebben, zullen wij aantoonen, dat elk dier figuren in drie gelijkbeenige driehoeken verdeeld kan worden, zoodanig, dat telkens één deel van den boldriehoek met één deel van den tegendriehoek congruent is.

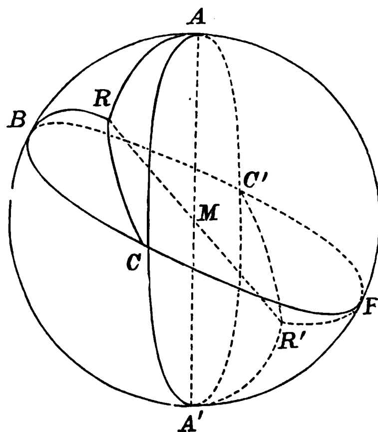


Fig. 481.

Zij ABC de boldriehoek, $A'B'C'$ de tegendriehoek. Volgens N⁰ 464 bepalen de drie

[redacted]

punten A B C een kleinen cirkel op den bol, die twee polen R en R' heeft, welke op één middellijn gelegen zijn. In N° 468 is dan bewezen, dat, als men R met A, B en C door bogen van groote cirkels vereenigt,

$$\text{bg } RA = \text{bg } RB = \text{bg } RC$$

is. De driehoeken R A B, R B C en R C A zijn dus alle gelijkbeenig.

Vereenigt men ook R' met A', B' en C' door groote cirkels, dan is duidelijk, dat de driehoeken R A B, R B C en R C A respectievelijk de driehoeken R' A' B', R' B' C', R' C' A' tot tegendriehoeken zullen hebben. Volgens N° 517 is nu

$$\text{Opp. } \triangle\, RAB = \text{Opp. } \triangle\, R'A'B',$$
$$\text{Opp. } \triangle\, RBC = \text{Opp. } \triangle\, R'B'C',$$
$$\text{Opp. } \triangle\, RAC = \text{Opp. } \triangle\, R'A'C',$$

derhalve door optelling

$$\text{Opp. } \triangle\, ABC = \text{Opp. } \triangle\, A'B'C'.$$

Opmerking: Het punt R wordt het middelpunt van den omgeschreven cirkel van △ A B C genoemd en de bogen R A, R B, R C heeten stralen van dien cirkel.

Indien wij in het verdere met den naam sphaerisch exces aanduiden het verschil van de som der hoeken van een boldriehoek met een gestrekten hoek, dan kunnen wij de volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 521. *Het oppervlak van een boldriehoek staat tot dat van den bol als het sphaerisch exces staat tot vier gestrekte hoeken.*

Bewijs: Deze eigenschap volgt onmiddellijk uit de vorige en de evenredigheid (1) in § 265 (Zie N° 508). Daar werd namelijk gevonden:

de som der hoeken: 180° =
(de halve bol + de boldriehoek + de tegendriehoek) : den halven bol.

Past men hierop nu een eigenschap der evenredigheden toe, dan vindt men

(de som der hoeken — 180°) : 180° =
(de boldriehoek + de tegendriehoek) : den halven bol,

of, in verband met de vorige eigenschap,

het sphaerisch exces: 180° = 2 × de boldriehoek : den halven bol.

Duidt men het sphaerisch exces met de letter E aan, dan wordt dus

$$\text{Opp. boldriehoek} = \frac{E}{4 \times 180^\circ} \times \text{Opp. bol.}$$

271. Wij voegen hieraan nog de analyse van een belangrijke meetkundige plaats toe.

Eigenschap 522. *De meetkundige plaats der toppen van de boldriehoeken, die dezelfde basis en gelijk oppervlak hebben, is een kleine cirkel, die door de tegenpunten van de uiteinden der basis gaat.*

Analyse: Zij de boldriehoek A B C een der driehoeken, die op de gegeven basis A B staan en bovendien het gegeven oppervlak hebben.

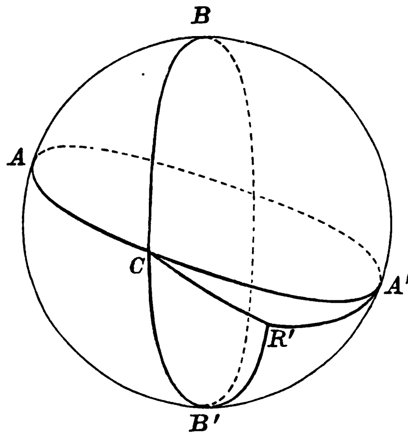


Fig. 482.

Voor alle driehoeken, die aan de gestelde eischen voldoen, heeft dan volgens N° 521 het sphaerisch exces dezelfde waarde, en hetzelfde zal dan van de som der hoeken gelden. Dus moet

$\angle ABC + \angle CAB + \angle ACB =$ een standvastige grootheid . (1)

zijn. Construeert men nu den topdriehoek A' B' C, dan is

$$\angle ACB = \angle A'CB',\ \angle ABC = \angle CB'A = 180^\circ - \angle CB'A',$$

en

$$\angle CAB = \angle CA'B = 180^\circ - \angle CA'B'.$$

Door substitutie dezer waarden in (1) vindt men dus

$(180^\circ - \angle CB'A') + (180^\circ - \angle CA'B') + \angle A'CB' =$ een standvastige grootheid,

dus

$360^\circ - (\angle CB'A' + \angle CA'B' - \angle A'CB') =$ een standvastige grootheid,

waaruit dan weder volgt

$\angle CB'A' + \angle CA'B' - \angle A'CB' =$ een standvastige grootheid . (2)

De vorm in het eerste lid der vergelijking is echter gemakkelijk te construeeren. Is namelijk R' het middelpunt van den omgeschreven cirkel van $\triangle CA'B'$, dan is, wegens de gelijkbeenigheid der driehoeken R' A' B', R' A' C en R' B' C

$$\angle R'B'C = \angle R'CB',\ \angle R'A'C = \angle R'CA' \text{ en}$$
$$\angle R'A'B' = \angle R'B'A'.$$

Trekt men nu den hoek A' C B' van de som der hoeken C B' A' en C A' B' af, dan is onmiddellijk duidelijk, dat het verschil uit $\angle R'A'B' + \angle R'B'A'$ bestaan zal,

of

$$\llcorner CB'A' + \llcorner CA'B' - \llcorner A'CB' = 2 \llcorner R'B'A',$$

en uit (2) volgt dan

$$\llcorner R'B'A' = \text{een standvastige grootheid.}$$

Hetzelfde geldt natuurlijk ook van $\llcorner R'A'B'$.

De toppen van alle boldriehoeken, die op de basis A B staan en gelijk oppervlak hebben, moeten derhalve zóó gelegen zijn, dat, als men het middelpunt R′ van den omgeschreven cirkel van den topdriehoek C A′ B′ construeert, de hoeken R′ A′ B′ en R′ B′ A′ steeds dezelfde waarde verkrijgen, hetgeen alleen mogelijk is, als het punt R′, voortdurend dezelfde plaats inneemt. Daar echter

$$R'C = R'A' = R'B'$$

is, en de punten A′ en B′ vaste punten zijn, zoo moet, indien ook R′ een vast punt is, het punt C liggen op den kleinen cirkel, die R tot middelpunt heeft en door A′ en B′ gaat. Deze kleine cirkel is dus de gezochte meetkundige plaats.

272. De vorige eigenschap kan, zooals men gemakkelijk begrijpt, aangewend worden om het werkstuk uit te voeren.

Een boldriehoek te construeeren, die hetzelfde oppervlak heeft, als een gegeven bolvierhoek (d. i. het deel van een bol, ingesloten door vier bogen van groote cirkels).

Zij A B C D die bolvierhoek; verdeelt men dezen nu door de diagonaal A C in twee driehoeken, dan kan men volgens N° 522 de meetkundige plaats bepalen van de toppen der driehoeken, die A C tot basis hebben en welker oppervlak gelijk is aan dat van △ A B C. Bepaalt men nu de punten, waar die meetkundige plaats, hetzij de zijde A D, hetzij C D snijdt en verbindt men zulk een snijpunt S in het eerste geval met C, in het tweede met A, dan heeft men b.v. in △ S C D een boldriehoek gevonden, die hetzelfde oppervlak heeft als de bolvierhoek A B C D.

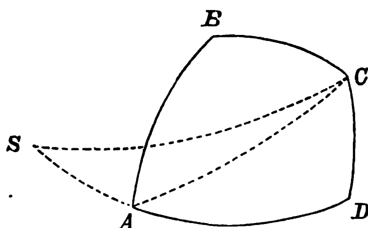


Fig. 483.

Vraagstukken.

1015. Hoe groot is het oppervlak van een boltweehoek, welks hoeken 27° zijn, als de straal van den bol, waartoe de tweehoek behoort, 3 dM. is?

1016. Van een tweevlakkigen bolsector is het bolvormig oppervlak gelijk aan de helft van het platte oppervlak. Bepaal den hoek van dat lichaam.

1017. Twee boltweehoeken van gelijk oppervlak hebben hoeken van 50° en 70°; hoe verhouden zich de inhouden der bollen, waartoe de tweehoeken behooren? En hoe verhouden zich de inhouden der tweevlakkige bolsectoren, die bij de boltweehoeken behooren?

1018. Van een boldriehoek zijn twee zijden recht. Wat weet men dan van de overstaande hoeken en van de derde zijde in verband met den daarover liggenden hoek?

1019. De som van de sphaerische afstanden van een punt binnen een boldriehoek tot de uiteinden van een der zijden is kleiner dan de som der beide andere zijden.

1020. De som der sphaerische afstanden van een punt binnen een boldriehoek tot de hoekpunten is kleiner dan de som der zijden en grooter dan haar halve som.

1021. Bewijs, dat twee boldriehoeken congruent of symmetrisch zijn, als twee zijden en de ingesloten hoek van den eenen gelijk zijn aan twee zijden en den ingesloten hoek van den anderen.

1022. Twee boldriehoeken zijn symmetrisch, als de drie zijden van den eenen gelijk zijn aan de drie zijden van den anderen en de gelijke elementen in de twee figuren in tegengestelde volgorde voorkomen.

1023. De groote cirkel, die den tophoek van een gelijkbeenigen boldriehoek halveert, deelt de basis loodrecht middendoor.

1024. Elk punt van den grooten cirkel, die een boog van een anderen grooten cirkel loodrecht halveert, heeft gelijke afstanden tot de uiteinden van dien boog.

1025. Elk punt buiten den grooten cirkel, die een boog van een anderen grooten cirkel loodrecht halveert, heeft ongelijke afstanden tot de uiteinden van dien boog.

1026. De drie groote cirkels, die de zijden van een boldriehoek loodrecht halveeren, gaan door één punt.

1027. Twee rechthoekige boldriehoeken zijn congruent of symmetrisch, als zij de hypothenusa en een aanliggenden hoek gelijk hebben. Welk geval is uitgezonderd?

1028. Elk punt van een grooten cirkel op een bol, die den hoek tusschen twee gegeven groote cirkels middendoor deelt, heeft gelijke sphaerische afstanden tot de beenen van dien hoek.

Onder den sphaerischen afstand van een punt op een bol tot een grooten cirkel verstaat men den kleinsten boog van den grooten cirkel, die door dat punt loodrecht op den gegeven cirkel getrokken wordt.

1029. Is een rechthoekszijde van een rechthoekigen boldriehoek scherp, dan is zij kleiner dan de hypothenusa. Hoe wijzigt zich deze eigenschap, als de rechthoekszijde stomp is?

1030. Elk punt buiten den grooten cirkel, die den hoek tusschen twee groote cirkels halveert, heeft ongelijke sphaerische afstanden tot de beenen van den hoek.

1031. De drie deellijnen der hoeken van een boldriehoek gaan door één punt.

1032. Is S de halve som der hoeken A, B, C van een boldriehoek, en verbindt men het middelpunt van den omgeschreven cirkel met de hoekpunten der groote cirkels, dan vormen deze bogen met de zijden hoeken, die door S—A, S—B, S—C voorgesteld worden.

1033. Van een boldriehoek zijn de hoeken 36°, 108° en 100°. Hoe groot is zijn oppervlak, als de straal van den bol 3 dM. bedraagt?

1034. Van een boldriehoek zijn de zijden 30°, 60° en 75°. Hoe groot is het oppervlak van den pooldriehoek, als de straal van den bol 2 dM. bedraagt?

1035. Twee boldriehoeken hebben gelijke oppervlakken, als hunne pooldriehoeken gelijke omtrekken hebben.

1036. Verander een willekeurigen boldriehoek in een gelijkbeenigen, die met den eersten de basis gemeen heeft, terwijl de oppervlakken dier twee driehoeken gelijk zijn.

1037. Gegeven een boldriehoek A B C en een punt P op de zijde B C. Gevraagd door P een grooten cirkel te trekken, die A C in Q snijdt, zoodat △ P Q C = △ A B C is.

HOOFDSTUK XLVII.

DE REGELMATIGE VEELVLAKKEN.

273. **Een veelvlak heet regelmatig**, als het door congruente regelmatige veelhoeken begrensd wordt en in elk hoekpunt evenveel zijvlakken samenkomen.

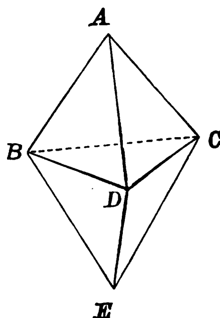


Fig. 484.

Het eenvoudigste regelmatige veelvlak is het regelmatig viervlak, dat door vier gelijkzijdige driehoeken begrensd wordt. Plaatst men nu hiertegen een ander, daarmede congruent regelmatig viervlak (zie E B C D en A B C D in nevenstaande figuur) zoodanig, dat één zijvlak van het éene viervlak een zijde van het andere volkomen bedekt, dan is het veelvlak A B C D E *niet* regelmatig, omdat in elk der hoekpunten A en E drie, maar in elk der punten B, C, D vier gelijkzijdige driehoeken samenkomen.

Eigenschap 523. *Er zijn geen regelmatige veelvlakken mogelijk, die door regelmatige veelhoeken met meer dan vijf zijden begrensd worden.*

Bewijs: Zijn de zijvlakken namelijk n-hoeken, dan is elke hoek daarvan $\frac{n-2}{n}$ gestrekte hoeken. In één hoekpunt van het lichaam moeten minstens drie zulke zijvlakken samenkomen, dus ontstaat daar een drievlakshoek, waarvan de som der zijden $\frac{3\,(n-2)}{n}$ gestrekte hoeken bedraagt. Maar volgens N° 351 moet deze som minder dan twee gestrekte hoeken bedragen, dus is

$$\frac{3\,(n-2)}{n} < 2,$$

$$3\,n - 6 < 2\,n,$$

waaruit volgt

$$n < 6.$$

Er zijn dus uitsluitend regelmatige veelvlakken mogelijk, die door regelmatige drie-, vier- of vijfhoeken begrensd worden.

Eigenschap 524. *Het aantal regelmatige veelhoeken bedraagt vijf.*

Bewijs: Beschouwen wij eerst de regelmatige veelvlakken, die door regelmatige driehoeken begrensd worden en onderstellen wij, dat er p driehoeken in elk hoekpunt samenkomen. Dan is daar een p-vlakshoek aanwezig, waarvan de som der zijden $p \times 60^\circ$ bedraagt. Volgens N⁰ 369 moet nu

$$p \times 60^\circ < 360^\circ \text{ dus } n < 6$$

zijn.

Bij een regelmatig veelvlak, dat door gelijkzijdige driehoeken begrensd wordt, kunnen dus slechts òf 3, òf 4, òf eindelijk 5 driehoeken in één punt samenkomen; in het geheel vindt men dus drie lichamen.

Op dezelfde wijze vindt men, indien een regelmatig veelvlak door regelmatige vierhoeken begrensd wordt, waarvan er p in elk hoekpunt samenkomen, dat

$$p \times 90^\circ < 360^\circ \text{ of } p < 4$$

zijn moet. Hieruit volgt dus slechts $p = 3$; wij verkrijgen derhalve één nieuw lichaam.

Wordt eindelijk het regelmatige lichaam door regelmatige vijfhoeken begrensd, dan moet, omdat een hoek van zulk een veelhoek 108° bedraagt,

$$p \times 108^\circ < 360^\circ \text{ of } p < 3\tfrac{1}{3},$$

derhalve $p = 3$ zijn.

In het geheel hebben wij dus $3 + 1 + 1 = 5$ regelmatige veelvlakken gevonden.

274. **Vraagstuk:** *Het aantal zijvlakken van elk der vijf regelmatige veelvlakken te berekenen.*

Stelt men het aantal zijvlakken, hoekpunten en ribben van het regelmatige veelvlak door z, h en r voor, dan is volgens N⁰ 406

$$z + h = r + 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Men kan nu gemakkelijk h en r in z uitdrukken, als men onderstelt, dat het regelmatige veelvlak door regelmatige n-hoeken begrensd wordt, waarvan er p in elk hoekpunt samenkomen.

Allereerst beschouwen wij het aantal hoekpunten. Een zijvlak heeft n hoekpunten, dus zullen aan z zijvlakken $z\,n$ hoekpunten aanwezig zijn. Maar, omdat er p zijvlakken in elk hoekpunt van het veelvlak samenkomen, zullen ook p hoekpunten van die in één hoekpunt samenkomende zijvlakken te zamen slechts één hoekpunt van het veelvlak

vormen. Dus doen $z\,n$ hoekpunten der zijvlakken slechts $\frac{z\,n}{p}$ hoekpunten van het lichaam ontstaan. Derhalve

$$h = \frac{z\,n}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Evenzoo vindt men het aantal ribben. Een der zijvlakken heeft n ribben. In het geheel zou het lichaam dus $z\,n$ ribben hebben. Maar twee zijvlakken sluiten steeds met een ribbe aan elkander, dus vormen twee ribben der zijvlakken slechts één ribbe van het lichaam, zoodat

$$r = \frac{z\,n}{2},$$

is. Substitueert men deze uitkomst en die uit de vergelijking (2) in (1), dan ontstaat

$$z + \frac{z\,n}{p} = \frac{z\,n}{2} + 2,$$

dus

$$z = \frac{2}{1 + \frac{n}{p} - \frac{n}{2}} = \frac{4\,p}{2\,p - n\,(p-2)}.$$

In deze formule kan men nu achtereenvolgens voor n en p de waarden invoeren. Beschouwen wij dus

1° het veelvlak, dat door regelmatige driehoeken begrensd wordt, waarvan er drie in elk hoekpunt samenkomen, waarvoor $n = 3$, $p = 3$ is. Nu is $z = 4$.

Dit veelvlak is het regelmatige viervlak of tetraëder.

2° Het veelvlak, dat door regelmatige driehoeken begrensd wordt, waarvan er vier in elk hoekpunt samenkomen; hiervoor is $n = 3$, $p = 4$. Dan wordt $z = 8$, waarom men het veelvlak regelmatig achtvlak of octaëder noemt.

3°. Het veelvlak, dat door regelmatige driehoeken begrensd wordt, waarvan er vijf in elk hoekpunt samenkomen; nu is $n = 3$, $p = 5$ en dus $z = 20$. Men spreekt hierbij van het regelmatige twintigvlak of icosaëder.

4°. Het veelvlak, dat door regelmatige vierhoeken begrensd wordt, waarvan er drie in elk hoekpunt samenkomen; dan is $n = 4$, $p = 3$, dus $z = 6$. Dit is het regelmatige zesvlak, hexaëder of kubus.

5°. Het veelvlak, dat door regelmatige vijfhoeken begrensd wordt, waarvan er drie in elk hoekpunt samenkomen. Nu is $n = 5$, $p = 3$,

dus $z = 12$. Hiermede hebben wij het **regelmatige twaalfvlak** of **dodekaedër** verkregen.

275. Wij zullen nu achtereenvolgens een eenvoudige constructie voor elk der vijf regelmatige veelvlakken aangeven, als telkens de lengte a der ribbe gegeven is.

1°. Constructie van het regelmatig viervlak.

Beschrijf met de gegeven ribbe a als zijde een gelijkzijdigen driehoek A B C. Richt in het middelpunt O van dezen driehoek een loodlijn op het vlak A B C op, breng een vlak door deze loodlijn en de rechte A O en beschrijf nu in dat vlak om A met a als straal een cirkelboog, die de zooeven genoemde loodlijn op het vlak A B C in T snijdt. Brengt men daarna vlakken door het punt T en elk der ribben B C, C A en A B, dan is het regelmatige viervlak verkregen.

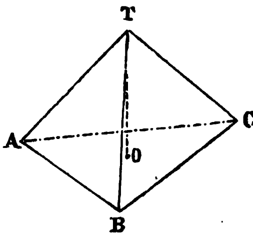


Fig. 485.

Bewijs: Brengt men een vlak U aan, dat de ribbe B C loodrecht halveert, dan zal dit volgens N° 374 door het punt O moeten gaan, omdat O op gelijke afstanden van de punten B en C ligt. Aangezien dit vlak U volgens N° 339 loodrecht op het vlak A B C staat, omdat het loodrecht staat op de rechte B C, die in het vlak A B C gelegen is, zoo zal de rechte O T, die loodrecht op het vlak A B C getrokken is, volgens N° 341 in het vlak U moeten liggen. Daar dezelfde redeneering geldt ten opzichte van de rechte O T en het vlak, dat A B loodrecht halveert, zal elk punt van O T volgens N° 374 even ver van B als van C en van A liggen. Dus is $TB = TC = TA$; maar T A is volgens de constructie $= a$, dus zijn de opstaande zijvlakken T B C, T C A, T A B gelijkzijdige driehoeken met de zijde a.

2°. Constructie van het regelmatig zesvlak.

Beschrijf een vierkant A B C D op de gegeven zijde a. Richt in elk der hoekpunten een loodlijn op het vlak A B C D op, en maak de lengte van elk dier loodlijnen gelijk aan a, zoodat de punten A′, B′, C′, D′, verkregen worden. Deze zullen dan volgens N° 372 in één vlak liggen, dat evenwijdig met het vlak A B C D is. Breng nu de vlakken A B B′ A′, B C C′ B′, C D D′ C′, D A A′ D′ en eindelijk ook A′ B′ C′ D′ aan, dan is de kubus geconstrueerd.

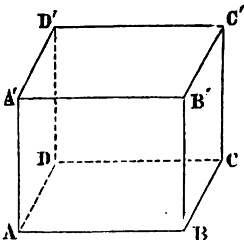


Fig. 486.

Het bewijs is gemakkelijk.

3°. Constructie van het regelmatig achtvlak.

Beschrijf een vierkant A B C D met de zijde a en trek daarin de diagonalen, die elkander in O snijden. Richt in O op het vlak A B C D een loodlijn op en zet daarop naar weerszijden van O af stukken O E en O F uit, die elk gelijk aan O A zijn. Breng nu vlakken door E en elk der zijden van den vierhoek A B C D en evenzoo door F en elk dier zijden, dan is E A B C D F een regelmatig achtvlak, zooals men gemakkelijk bewijst.

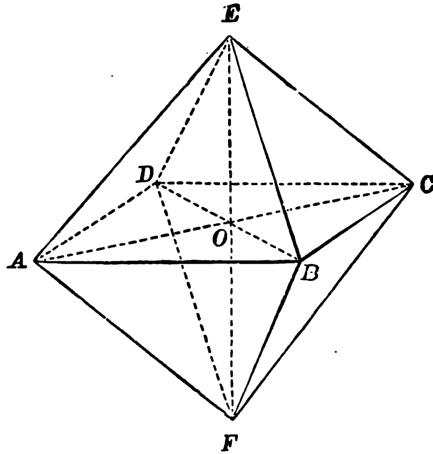


Fig. 487.

4°. Constructie van het regelmatig twaalfvlak.

Construeer een gelijkzijdigen driehoek A C G (Fig. 488), waarvan de zijde gelijk is aan de diagonaal van den regelmatigen vijfhoek met de zijde a. Richt in het middelpunt van dezen driehoek een loodlijn op het vlak A C G op en beschrijf in het vlak, door deze loodlijn en A O gebracht, een cirkel om A met den straal a, die de loodlijn in B snijdt. Vereenigt men nu B met A, C en G dan is

$$BA = BC = BG = a.$$

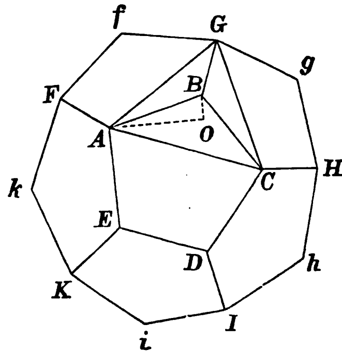


Fig. 488.

Omdat nu A B en B G elk een zijde en bovendien A G een diagonaal van denzelfden regelmatigen vijfhoek zijn, zal $\angle$ A B G dus een hoek van dien vijfhoek voorstellen en hetzelfde geldt van de hoeken G B C en A B C.

In de vlakken A B G, B G C en A B C kunnen nu dus de regelmatige vijfhoeken A B G f F, C B G g H en A B C D E geconstrueerd worden. Dan is echter

de drievlakshoek C B H D $\cong$ met den drievlakshoek B A G C,

daar zij twee zijden gelijk en den ingesloten hoek gemeen hebben. Dus is

$\angle$ H C D = $\angle$ G B A = een hoek van een regelmatigen vijfhoek,

zoodat men nu een nieuwe zoodanige figuur D C H *h* I in het vlak D C H kan construeeren.

Dan is weder

de drievlakshoek D E C I $\cong$ met den drievlakshoek C B H D,

zoodat opnieuw een regelmatige vijfhoek E D I *i* K geconstrueerd kan worden. Omdat eindelijk, zooals men gemakkelijk inziet,

de drievlakshoek A B F E $\cong$ met den drievlakshoek E A D K

is, zullen de standhoeken, die in beide figuren op A E liggen, gelijk zijn, zoodat het vlak F A E met het vlak K E A moet samenvallen en dan is dus ten slotte nog een regelmatige vijfhoek F A E K *k* mogelijk.

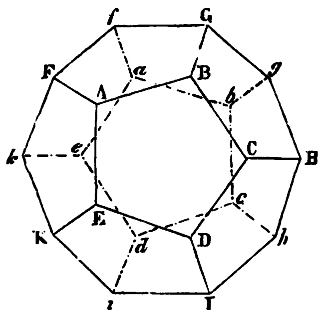


Fig. 489.

Op deze wijze heeft men nu een samenstel van zes regelmatige vijfhoeken verkregen.

Let men op den tienhoek F *f* G *g* H *h* I *i* K *k*, welks hoekpunten niet in één plat vlak liggen, dan blijkt onmiddellijk, dat in elk der punten F, G, H, I, K twee vijfhoeken uitkomen, terwijl daarentegen in *f*, *g*, *h*, *i*, *k* elk nog slechts één vijfhoek aanwezig is.

Construeert men nu een tweede zestal van regelmatige vijfhoeken, dat met het eerste congruent is en uit den vijfhoek *a b c d e* met vijf daaraan sluitende vijfhoeken bestaat, dan ziet men gemakkelijk in, dat deze figuur geheel aan de vorige aangepast kan worden, indien men slechts zorg draagt, dat de hoekpunten van den tienhoek van het eerste zestal, waarin twee vijfhoeken uitkomen, juist samenvallen met die hoekpunten van den tienhoek van het tweede zestal, waaraan één vijfhoek gelegen is. Zoodoende ontstaat dan fig. 489.

5⁰. **Constructie van het regelmatig twintigvlak.**

Construeer een regelmatigen vijfhoek B C D E F met de zijde *a*, richt in het middelpunt O een loodlijn op het vlak van den vijfhoek op en beschrijf in het vlak, door deze loodlijn en B O gebracht, een cirkelboog om B met *a* als straal, welke de vorige loodlijn in A snijdt, dan ontstaan door vereeniging van A met B, C, D, E, F vijf gelijkzijdige driehoeken met de zijde *a*.

Denkt men nog B D getrokken, dan is $\triangle$ B C D $\cong$ $\triangle$ B A D, daar zij de drie zijden gelijk hebben. Dus is

$\llcorner$ B A D = een hoek van een regelmatigen vijfhoek,
en men kan dus in het vlak B A D een nieuwen regelmatigen vijfhoek B A D f e construeeren en daarna C met e en f verbinden. Nu is

de drievlakshoek D f C A $\cong$
met den drievlakshoek A B C D,

omdat

$$\llcorner A D f = \llcorner B A D$$

en

$$\llcorner C D A = \llcorner C A D$$

is, terwijl die figuren den standhoek op A D gemeen hebben. Derhalve is

$$\llcorner C D f = \llcorner B A C = 60°,$$

zoodat $\triangle$ C D f gelijkzijdig zijn moet, dus

$$C f = a \text{ en } \llcorner f C D = 60°.$$

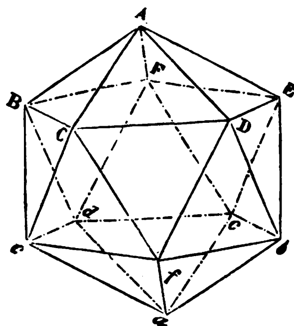


Fig. 490.

Evenzoo bewijst men uit de congruentie der drievlakshoeken B A C e en A B C D, dat

$$\llcorner C B e = 60°, \; C e = a \text{ en } \llcorner B C e = 60°$$

is, dus is ten slotte ook $\triangle$ C e f gelijkzijdig en $\llcorner$ e C f = 60°.

Gemakkelijk ziet men nu in, dat

de pyramide C A B e f D $\cong$ pyr. A B C D E F

is.

Uit de beschouwing van den vijfhoek A D f e B volgt verder $e f \parallel$ B D en uit vijfhoek B C D E F volgt E F $\parallel$ B D, dus is ook $e f \parallel$ E F.

Eindelijk liggen de drie rechten C f, C A en A E in één vlak; want

de drievlakshoek C A D f $\cong$ met den drievlakshoek A E D C,

daar zij de drie zijden gelijk hebben; hieruit volgt nu, dat de standhoeken op de ribbe A C in die beide figuren gelijk zijn; dus vormen de vlakken A C f en C A E denzelfden hoek met het vlak A C D, zoodat die vlakken A C f en C A E samenvallen moeten. Men kan derhalve een nieuwen vlakken regelmatigen vijfhoek A C f b E construeeren en bewijst weder, dat $f b \parallel$ B F is, op dezelfde wijze, als waarop zooeven bleek, dat $e f \parallel$ E F is.

Zoo voortgaande verkrijgt men eindelijk den volledigen regelmatigen vijfhoek $b c d e f$, waarvan de zijden gelijk en evenwijdig zijn aan die van den veelhoek B C D E F.

Construeert men op $b c d e f$ als grondvlak nu een pyramide, die congruent is met de pyramide A B C D E F, dan is een veelvlak verkregen, dat door twintig congruente gelijkzijdige driehoeken begrensd wordt, zóó, dat in elk hoekpunt vijf zijvlakken samenkomen.

276. **Eigenschap 525.** ***Alle tweevlakshoeken van een regelmatig veelvlak zijn gelijk.***

Bewijs: Het bewijs dezer eigenschap is zeer gemakkelijk voor die veelvlakken, bij welke in elk hoekpunt drie veelhoeken of driehoeken samenkomen. Want dan zijn de drievlakshoeken, die in elk hoekpunt aanwezig zijn, zooals b. v. de drievlakshoeken A B F E en C B H D in fig. 489, congruent, omdat zij gelijke zijden hebben; dus zijn ook de tweevlakshoeken dier figuren twee aan twee gelijk, en omdat elk dier drievlakshoeken bovendien gelijkzijdig is, besluit men, dat de zes hoeken dier figuren alle gelijk zijn moeten.

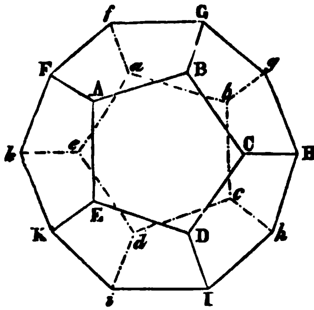


Fig. 489.

Zoo zijn in het gekozen voorbeeld de standhoeken op A B, A F, A E, C B, C D en C H alle gelijk.

Voor het regelmatig achtvlak bewijst men de eigenschap gemakkelijk uit de constructie, die wij op blz. 185 mededeelden. Beschouwt men namelijk in fig. 487 den vierhoek E B F D, dan is deze volgens de constructie een vierkant, omdat de diagonalen gelijk zijn en elkander loodrecht middendoor deelen. Derhalve is in de drievlakshoeken A B D E en F B D A.

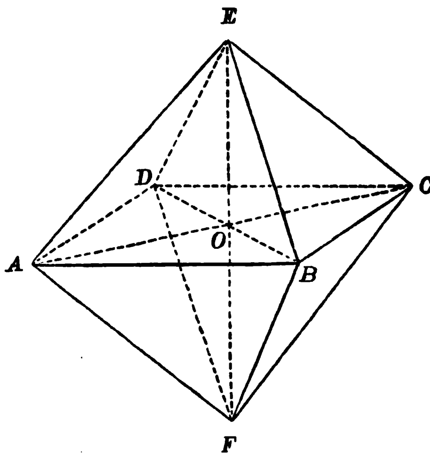


Fig. 487.

∟ D A B = ∟ D F B = 1 R,
∟ D A E = ∟ A F B = 60°,
en
∟ E A B = ∟ A F D = 60°;
zij hebben dus de drie zijden gelijk, zoodat

de standhoek op A E in den drievlakshoek A B D E =
dien op F A in den drievlakshoek F B D A.

Op dergelijke wijze kan men de gelijkheid van elk ander paar standhoeken aantoonen.

Er blijft nu nog slechts over het bewijs te leveren voor het regelmatig twintigvlak.

Uit de congruentie der drievlakshoeken B A C F en D A C f, die de zijden gelijk hebben, volgt onmiddellijk, dat de standhoeken op de ribben B A en D C gelijk zijn. Op gelijke wijze kan de eigenschap voor de standhoeken op elk ander paar ribben bewezen worden.

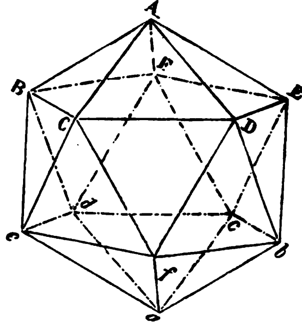


Fig. 490.

277. De voornaamste eigenschap der regelmatige veelvlakken is, dat om en in elk regelmatig veelvlak een bol beschreven kan worden. Alvorens echter tot de behandeling hiervan over te gaan, bespreken wij eerst den om- en den ingeschreven bol bij het eenvoudigste lichaam, d. i. het viervlak.

Eigenschap 526. *Om elk viervlak kan steeds een bol en niet meer dan één bol beschreven worden.*

Bewijs: Men heeft allereerst aan te toonen, dat altijd een punt kan gevonden worden, dat gelijke afstanden tot elk der vier hoekpunten A, B, C, D, heeft. Alle punten, die even ver van A als van B verwijderd zijn, liggen in een vlak, dat A B loodrecht middendoor deelt (N⁰ 374). Evenzoo heeft men vlakken aan te brengen, die A C en A D loodrecht middendoor deelen, om de meetkundige plaatsen der punten te vinden, die even ver van A als van C en even ver van A als van D verwijderd zijn. De drie aldus geconstrueerde vlakken hebben een punt P gemeen, welks afstanden tot B, C, D elk gelijk zijn aan den afstand tot A; dus ligt P op gelijke afstanden van de vier hoekpunten.

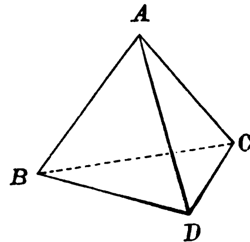


Fig. 491.

Daar P A = P B en P A = P C is, zal dus ook P B = P C zijn, en hieruit volgt dan, dat P tevens moet liggen in het vlak, dat B C loodrecht middendoor deelt. Evenzoo bewijst men, dat P moet liggen in elk der vlakken, die C D en D B loodrecht halveeren, zoodat geen ander punt dan P het middelpunt van een omgeschreven bol zijn kan.

Hieruit kan nog besloten worden tot

Eigenschap 527. *De zes vlakken, die de ribben van een viervlak loodrecht halveeren, gaan door één punt.*

Tevens sluit zich hierbij aan:

Eigenschap 528. *In elk viervlak kan steeds een bol en niet meer dan één bol beschreven worden.*

Het bewijs is volkomen gelijk aan het voor N⁰ 526 gegevene, zooals blijkt, als men slechts opmerkt, dat het middelpunt van den gezochten bol op gelijke afstanden van de vier zijvlakken moet liggen en dus volgens N⁰ 376 gelegen zijn moet in elk der vlakken, die de tweevlakshoeken tusschen de zijvlakken van het viervlak middendoor deelen.

Tevens blijkt uit dit bewijs dan ook:

Eigenschap 529. *De zes vlakken, die de tweevlakshoeken van een viervlak halveeren, gaan door één punt.*

278. Wij gaan nu over tot het bewijs van

Eigenschap 530. *Om en in elk regelmatig veelvlak kan een bol beschreven worden.*

Bewijs: Men kieze twee willekeurige aan elkander sluitende zijvlakken

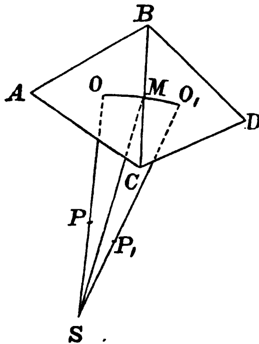


Fig. 492 *a.*

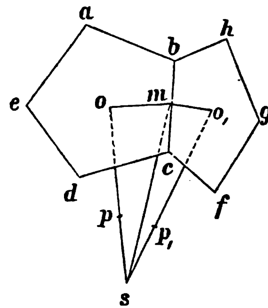


Fig. 492 *b.*

van het lichaam uit, b. v. de driehoeken A B C en B C D in fig. 492 *a* of de vijfhoeken *a b c d e* en *b c f g h* in fig. 492 *b* en construeere de middelpunten van deze (O en O_1 in fig. 492 *a*, *o* en o_1 in fig. 492 *b*).

Richt men nu in een middelpunt, b. v. O, een loodlijn op het zijvlak op, dan is elk punt, b. v. P, van die loodlijn op gelijke afstanden van de hoekpunten van het zijvlak verwijderd. In fig. 492 *a* is b. v. $PA = PB = PC$, omdat

$$POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$$

is. Richt men ook in het middelpunt van het tweede zijvlak een loodlijn $O_1 P_1$ op dat zijvlak op, dan moet deze de eerste snijden. Want de loodlijnen, uit O en O_1 op de gemeenschappelijke zijde B C der zijvlakken neergelaten, hebben hetzelfde voetpunt, namelijk het midden M dier zijde. Nu is het vlak $POM \perp BC$ en het vlak $P_1 OM \perp BC$;

dus moeten die vlakken P O M en P_1 O M samenvallen, zoodat de loodlijnen O P en $O_1 P_1$ in één vlak liggen en daarom elkander snijden moeten.

Zij S het snijpunt; verbindt men dit met M, dan is

$$\triangle OMS \cong \triangle O_1MS,$$

omdat

$$OM = O_1M, MS = MS \text{ en } \llcorner SOM = \llcorner SO_1M = 1R$$

is. Dus is

$$SO = SO_1 \text{ en } \llcorner SMO_1 = \llcorner SMO.$$

Daar $\llcorner OMO_1$ een standhoek van het regelmatig veelvlak is, is dus $\llcorner SMO_1$ gelijk aan den halven standhoek.

Nu is van $\triangle SO_1M$ bekend: MO_1 = de straal van den ingeschreven cirkel van een zijvlak van het veelvlak, $\llcorner SO_1M = 1R$, $\llcorner SMO_1$ = den halven standhoek, zoodat de rechte SO_1 uit die gegevens volkomen bepaald kan worden. Daarom zal de loodlijn O_1P_1 door de loodlijnen, die op de aan C D en B D aansluitende zijvlakken van het lichaam in hunne middelpunten opgericht kunnen worden, in hetzelfde punt S gesneden moeten worden, waaruit men dan gemakkelijk besluit, dat de loodlijnen, op *alle* zijvlakken van het lichaam in hunne middelpunten opgericht, door S gaan. Bovendien zijn al deze loodlijnen, zooals S O en SO_1, gelijk; dus is S het middelpunt van een bol, die in het regelmatig veelvlak beschreven kan worden.

Denkt men nu S met twee willekeurige hoekpunten, b. v. A en D verbonden, dan is

$$\triangle SOA \cong \triangle SO_1D,$$

$$(SO = SO_1,\ AO = DO_1 \text{ en } \llcorner SOA = \llcorner SO_1D = 1R);$$

dus is $SA = SD$, zoodat S ook op gelijke afstanden van al de hoekpunten gelegen zijn moet.

Het punt S is dus tevens het middelpunt van een om het veelvlak beschreven bol.

279. De belangrijkste opgave bij de regelmatige veelvlakken is nu

Vraagstuk. ***Den straal van den omgeschreven bol van een regelmatig veelvlak te bepalen.***

Algemeene methode: Kiest men een willekeurig hoekpunt A van het lichaam uit en verbindt de uiteinden der in dat punt uitkomende ribben, dan ontstaat een regelmatige drie-, vier- of vijfhoek, waarvan de zijde òf gelijk aan de ribbe a van het lichaam is, òf in a uitgedrukt kan worden.

Wij stellen deze zijde door a_n voor en noemen den driehoek of

veelhoek zelven ook een n-hoek. In fig. 493 is dit de vijfhoek B C D E F.

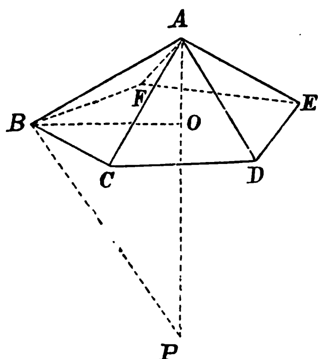


Fig. 493.

Laat men nu uit A een loodlijn neer op het vlak van dien n-hoek en noemt men O het voetpunt, dan is O het middelpunt van den cirkel, om den n-hoek beschreven. Zij ϱ de straal van dien cirkel, dan is in de planimetrie aangegeven, hoe a_n in ϱ kan worden uitgedrukt en dus kan omgekeerd ook ϱ uit a_n gevonden worden. In den rechthoekigen driehoek A O B is dan

$$A O = \sqrt{a^2 - \varrho^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Wanneer men nu A O verlengt, moet deze rechte ook het middelpunt M van den om het veelvlak beschreven bol bevatten, omdat A O de meetkundige plaats der punten is, die gelijke afstanden tot B, C, D, E en F hebben. Snijdt het verlengde van A O den bol in P, dan is dus A P een middellijn van den bol, waaruit volgt, dat $\triangle$ A B P rechthoekig is. Duidt men den straal van den om het veelvlak beschreven bol met R aan, zoodat A P = 2 R is, dan wordt, omdat

$$A B^2 = A O \times A P$$

is, dus ook

$$a^2 = 2 R \sqrt{a^2 - \varrho^2},$$

en hieruit volgt dan

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \varrho^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Wij zullen deze berekening nu doorvoeren voor het regelmatig twintigvlak en het twaalfvlak.

1°. Voor het twintigvlak kan fig. 493 onmiddellijk dienst doen.

Nu is B C = a_5 = de gegeven ribbe a. Maar

$$a_5 = \tfrac{1}{2} \varrho \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

dus

$$a = \tfrac{1}{2} \varrho \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

waaruit volgt

$$\varrho = \frac{2a}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{10} a \sqrt{50 + 10\sqrt{5}}.$$

Derhalve wordt nu volgens (2)

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2(50 + 10\sqrt{5})}{100}}} =$$

$$= \frac{5a}{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}$$

of ten slotte

$$R = \tfrac{1}{4}a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

2°. Voor het twaalfvlak is de n-hoek een driehoek (BCD in fig. 494). waarvan de zijde een diagonaal is van den regelmatigen vijfhoek, die a tot zijde heeft. Daar nu a het grootste stuk is van de in de uiterste en middelste reden verdeelde diagonaal, die wij hier door a_3 voorstellen, is dus

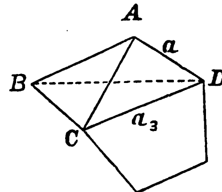


Fig. 494.

$$a = \tfrac{1}{2}a_3(\sqrt{5} - 1),$$

of

$$a_3 = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1).$$

Verder is

$$a_3 = \varrho\sqrt{3},$$

dus

$$\varrho = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{6}a(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$$

en eindelijk

$$R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{1}{12}a^2(6 + 2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1}$$

of ten slotte

$$R = \tfrac{1}{4}a(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}.$$

280. Voor de overige regelmatige veelvlakken kan de straal van den omgeschreven bol langs een veel korteren weg gevonden worden.

1°. Bij het viervlak ligt het middelpunt van den omgeschreven bol

in elk der loodlijnen, uit de hoekpunten op de overstaande zijvlakken neergelaten. Deze loodlijnen zijn tevens de zwaartelijnen en gaan dus volgens N° 395 door één punt. Maar volgens die zelfde eigenschap is dan

$$R = \tfrac{3}{4} \times \text{de hoogtelijn.}$$

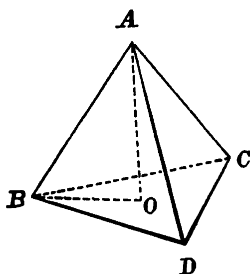


Fig. 495.

In den rechthoekigen driehoek A B O is B O de straal van den om △ B C D beschreven cirkel; dus

$$a = BO\sqrt{3},$$

of

$$BO = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Nu is

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2,$$

en dus

$$R = \tfrac{3}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}a^2} = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6}.$$

2°. Bij den kubus ligt het middelpunt van den omgeschreven bol in het snijpunt der diagonalen en is de straal van dien bol volgens N° 385 dus de helft van een diagonaal. Derhalve heeft men in verband met N° 387

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}.$$

3°. Bij een regelmatig achtvlak (fig. 487) ligt het middelpunt van den omgeschreven bol in het snijpunt O der drie onderling loodrechte diagonalen, die bij de constructie dienst deden. Dus is de straal van dien bol gelijk aan de halve diagonaal of

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

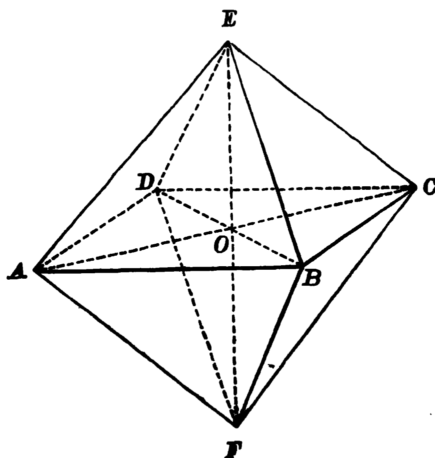


Fig. 487.

281. Is eenmaal de straal van den omgeschreven bol van een regelmatig veelvlak bekend, dan kan die van den ingeschreven bol steeds op eenvoudige wijze berekend worden.

Deze straal is namelijk de loodlijn, uit het middelpunt M neergelaten op een der zijvlakken, b. v. op A B C D E in fig. 496. Verbindt men nu een hoekpunt A van dat zijvlak met het voetpunt O dier loodlijn en met M, dan is in △ A M O, als $MO = r$ en de straal A O van den om het zijvlak beschreven cirkel $= r_1$ gesteld wordt,

$$r^2 = R^2 - r_1^2.$$

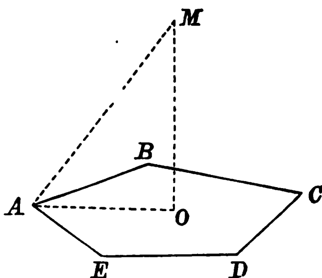


Fig. 496.

Hierin is R bekend, terwijl r_1 gemakkelijk met behulp van de planimetrie gevonden wordt.

282. Eindelijk bewijzen wij nog de stelling:

Eigenschap 531. *De inhoud van een regelmatig veelvlak is gelijk aan het derde deel van het product van den straal van den ingeschreven bol met het oppervlak van het lichaam.*

Bewijs: Verbindt men het middelpunt van het veelvlak met de hoekpunten, dan wordt het veelvlak verdeeld in pyramiden, die alle gelijke hoogte hebben, namelijk den straal r van den ingeschreven bol, terwijl elk dier pyramiden een zijvlak van het lichaam tot grondvlak heeft. Door optelling vindt men dus

Inhoud $= \frac{1}{3} r \times$ de som van de oppervlakken der zijvlakken.

$= \frac{1}{3} r \times$ het oppervlak van het lichaam.

Vraagstukken.

1038. Bepaal het aantal lichaamsdiagonalen van elk der regelmatige veelvlakken.

1039. Druk het oppervlak van elk der regelmatige veelvlakken in de ribbe a uit.

1040. Als een regelmatig viervlak en achtvlak in denzelfden bol beschreven zijn, dan verhouden de oppervlakken dier lichamen zich als 2 tot 3.

1041. Om het middelpunt van elk regelmatig veelvlak kan een bol beschreven worden, die alle ribben van het lichaam raakt.

1042. De middens der ribben van een regelmatig viervlak zijn de hoekpunten van een regelmatig achtvlak.

1043. De middelpunten der zijvlakken van een kubus zijn de hoekpunten van een regelmatig achtvlak.

1044. Druk de ribbe van het achtvlak van vraagstuk 1043 uit in de ribbe van den kubus.

1045. De middelpunten der zijvlakken van een regelmatig achtvlak zijn de hoekpunten van een kubus.

1046. Druk de ribbe van den kubus in vraagstuk 1045 uit in de ribbe van het achtvlak.

1047. Druk den straal van den ingeschreven bol van elk der regelmatige veelvlakken uit in de ribbe *a*.

1048. Bepaal ook den straal van den bol, die de ribben van een regelmatig veelvlak raakt, bij elk dier lichamen afzonderlijk, als de ribbe *a* is.

1049. Bepaal den inhoud der verschillende regelmatige veelvlakken, als telkens de ribbe gegeven is.

1050. Het grootste stuk van de in de uiterste en middelste reden verdeelde ribbe van een kubus is gelijk aan de ribbe van het regelmatig twaalfvlak, dat met dien kubus in denzelfden bol beschreven kan worden.

1051. Laat men uit een willekeurig punt binnen een regelmatig *n*-vlak loodlijnen op alle zijvlakken neer, dan is de som dier loodlijnen gelijk aan *n*-maal den straal van den in dat veelvlak beschreven bol.

Herhaling.

1052. Binnen een regelmatig achtvlak ligt een cylinder zoodanig, dat de omtrekken van grond- en bovenvlak de zijvlakken van den octaëder raken in hun zwaartepunten. Als de ribbe van het achtvlak *a* is, hoe groot is dan de inhoud van den cylinder (Eindex. h. b. s., 1869)?

1053. Hoe ver moet het oog van het middelpunt van een bol verwijderd zijn, om $\frac{1}{n}$-de gedeelte van de oppervlakte van den bol te kunnen overzien? (Eindex. h. b. s., 1869).

1054. Den inhoud te berekenen van de stukken, waarin een bol, welks straal R is, verdeeld wordt door een cylinder, welks as door het middelpunt van den bol gaat en die een straal *r* heeft. (Eindex. h. b. s., 1870).

1055. In een bol is een kegelvormig gat, zoodanig, dat de top van den kegel in het oppervlak van den bol ligt, terwijl de as door het middelpunt van den bol gaat. Als nu de inhoud van het overblijvende gedeelte driemaal zoo groot is als die van de in den bol gemaakte

opening, hoe groot is dan de straal van het grondvlak van den kegel? (Eindex. h. b. s., 1871.)

1056. Een kegel is met zijn top in een der hoekpunten van een gegeven kubus geplaatst, terwijl de omtrek van zijn grondvlak door het midden gaat van de drie ribben, die in het tegenovergestelde hoekpunt van den kubus samenkomen. Men vraagt den inhoud van den kegel te bepalen, als de ribbe van den kubus gegeven is. (Eindex. h. b. s., 1872).

1057. Uit een punt P, gelegen op het verlengde van de middellijn A B van een halven cirkel, is een lijn getrokken, die den halven cirkel in een punt C raakt. Indien nu $AB = 2a$ en boog $BC = 60^\circ$ is, vraagt men het oppervlak en den inhoud te berekenen van het lichaam, dat ontstaat door de wenteling van de figuur A C P om de lijn A P. (Eindex. h. b. s., 1872).

1058. Aan twee cirkels, die elkander uitwendig raken en waarvan de stralen R en r gegeven zijn, is een gemeenschappelijke raaklijn getrokken. Bereken den inhoud van het lichaam, dat ontstaat door de figuur, welke begrensd wordt door de raaklijn en de cirkelbogen, begrepen tusschen hunne raakpunten met de rechte lijn en hun gemeenschappelijk raakpunt, te laten wentelen om de lijn, die de middelpunten vereenigt. (Eindex. h. b. s., 1873).

1059. In en om een gelijkzijdigen driehoek zijn cirkels beschreven. De figuur wentelt om de middellijn, die door een der hoekpunten gaat. Men vraagt den inhoud der verschillende deelen te berekenen, waaruit het omwentelingslichaam samengesteld is, als men den straal van den grootsten cirkel R noemt. (Eindex. h. b. s., 1874).

1060. Als een regelmatige vijfhoek, beschreven in een cirkel, welks straal 1 M. is, om een middellijn wentelt, die door een zijner hoekpunten gaat, vraagt men het oppervlak en den inhoud te bepalen van het omwentelingslichaam, dat hierdoor ontstaat. (Eindex. h. b. s., 1875).

1061. Een bol rust in een rechten kegel, welks as loodrecht staat, terwijl de top naar beneden gekeerd is. Het grondvlak van den kegel is gelijk aan het oppervlak van den bol; de inhoud van den kegel is 2,5 maal zoo groot als de inhoud van den bol, die 16 dM^3. is. Bereken den afstand van het middelpunt van den bol tot den top van den kegel. (Eindex. h. b. s., 1875).

1062. Op de zijde van een gelijkzijdigen driehoek als middellijn wordt een halve cirkel beschreven. Men vraagt naar den inhoud van het omwentelingslichaam, dat ontstaat door het gedeelte van den driehoek, dat buiten den halven cirkel ligt, om de middellijn te laten wentelen. (Eindex. h. b. s., 1876).

1063. Van een biconvex lensvormig lichaam is de dikte 5 cM., en zijn de stralen van de bolvormige oppervlakken, die het begrenzen,

55 en 37,5 c.M. Men vraagt den inhoud van dit lichaam te berekenen. (Eindex. h. b. s., 1876).

1064. Twee kegels liggen binnen een bol; zij hebben denzelfden top, en de beschrijvende lijnen van den eenen zijn de verlengden van die des anderen; de omtrekken der grondvlakken liggen op het oppervlak van den bol. De straal van den bol is 29 cM., de afstand van de grondvlakken der beide kegels bedraagt 41 cM. en de afstand van den gemeenschappelijken top tot het middelpunt van den bol is 1 cM. Men vraagt den inhoud van het omwentelingslichaam, dat door de beide kegelvlakken en door het oppervlak van den bol begrensd wordt. (Eindex. h. b. s., 1877).

1065. Op het oppervlak van een bol zijn een groote en een kleine cirkel getrokken, die elkander raken en welker vlakken een hoek van 30° met elkander maken. Hoe groot zijn het ronde oppervlak en de inhoud van het gedeelte van den bol, tusschen die beide vlakken begrepen, indien het oppervlak van den bol als eenheid van vlaktemaat en de inhoud van den bol als eenheid van inhoudsmaat worden aangenomen? (Eindex. h. b. s., 1878).

1066. Uit een punt C, gelegen op het verlengde der middellijn A B van een halven cirkel, is een lijn getrokken, die den halven cirkel in D raakt. Als nu de straal van den cirkel M A $= r$ en de lijn M C $= a$ gegeven is, vraagt men de inhouden te berekenen van de lichamen, voortgebracht door de wenteling der figuren C D B en C D A om de lijn C B. (Eindex. h. b. s., 1879).

1067. Van een afgeknotten kegel is de straal van het bovenvlak de helft van dien van den ingeschreven bol. Men vraagt de verhouding te berekenen 1°. tusschen den inhoud van den afgeknotten kegel en dien van den ingeschreven bol; 2°. tusschen de segmenten, waarin de bol door den raakcirkel verdeeld wordt. (Eindex. h. b. s., 1880).

1068. Een bol rust op een horizontaal vlak; in de verticaal, die door het middelpunt gaat, bevindt zich een lichtgevend punt. Hoe groot is de afstand van dit punt tot het middelpunt van den bol, als het verlichte gedeelte van het bolvormig oppervlak even groot is als de schaduw, die de bol op het horizontale vlak werpt. (Eindex. h. b. s., 1881).

1069. Twee raaklijnen aan een cirkel, waarvan de staal r is, ontmoeten elkander onder een hoek van 60°. De figuur, ingesloten door de twee raaklijnen en den kleinsten boog van den cirkel, tusschen de twee raakpunten begrepen, wentelt om de middellijn van den cirkel, die door een der raakpunten gaat. Men vraagt den inhoud van het lichaam, dat door deze wenteling ontstaat. (Eindex. h. b. s., 1882).

1070. Om een rechten cirkelkegel, waarvan de hoogte h en de straal van het grondvlak r is, is een bol beschreven. Beide lichamen worden

gesneden door een plat vlak, evenwijdig met het grondvlak van den kegel, zoodat de inhouden van de cirkels, volgens welke de bol en de kegel worden gesneden, zich verhouden als n tot 1. Op welken afstand van den top moet het snijvlak aangebracht worden? (Eindex. h. b. s., 1883).

1071. De top van een rechten cirkelkegel, waarvan de schuine zijde 4, de hoogte 3 is, valt samen met het middelpunt van een bol. Hoe groot moet de straal van dezen bol zijn, opdat de inhoud van het deel van den bol, dat buiten den kegel ligt, gelijk zij aan tweemaal het deel van den kegel, dat buiten den bol ligt? (Eindex. h. b. s., 1883).

1072. De straal van een bol is in de uiterste en middelste reden verdeeld; het grootste stuk ligt aan het middelpunt. Door het deelpunt is een vlak gebracht, loodrecht op dien straal. In het grootste bolsegment, hetwelk dit vlak van den bol afsnijdt, is een regelmatige vierzijdige pyramide beschreven, waarvan de top ligt in het oppervlak van het bolsegment en het grondvlak in het loodrechte vlak. Bepaal van deze pyramide den inhoud en het geheele oppervlak. (Eindex. h. b. s., 1884).

1073. Van een rechten cirkelvormigen kegel met een tophoek van 60° is de straal van het grondvlak gegeven. In dezen kegel een cylinder te beschrijven, waarvan de inhoud gelijk is aan den inhoud van den bol, die in den overblijvenden kegel kan beschreven worden. (Eindex. h. b. s., 1885).

1074. Aan de uiteinden A en B van een cirkelboog A B C zijn raaklijnen getrokken, die elkaar snijden in D. De punten A en B zijn met het middelpunt M van den boog A C B vereenigd, de hoek M is 45° en M A $= r$. De figuur M A D B wentelt om M A als as. Bepaal de inhouden der lichamen, die ontstaan door de wenteling van den driehoek A M B, van het cirkelsegment A C B en van de figuur A D B C. (Eindex. h. b. s., 1886).

1075. In het grondvlak van een regelmatige vierzijdige pyramide, waarvan elke ribbe a is, heeft men een cirkel beschreven; op dezen cirkel is een rechte cylinder beschreven, welks cylindervlak de opstaande ribben snijdt. In het vierkant, waarvan deze snijpunten de hoekpunten zijn, heeft men eveneens een cirkel beschreven. Men vraagt den inhoud te bepalen van den afgeknotten kegel, waarvan deze cirkels het grond- en bovenvlak zijn. (Eindex. h. b. s., 1886).

1076. Een driehoek A B C, rechthoekig in C, wordt door een lijn C D, die den rechten hoek middendoor deelt, in twee driehoeken A C D en B C D verdeeld. Door het punt C wordt in het vlak van den driehoek een lijn loodrecht op C D getrokken. Als de driehoek om de laatste lijn wentelt, bepaal dan de verhouding van de inhouden der

twee lichamen, door de driehoeken A C D en B C D beschreven. De rechthoekszijden zijn a en b lang. (Eindex. h. b. s., 1887).

1077. Van een rechten cirkelvormigen kegel is de straal van het grondvlak r en de schuine zijde s. Op welken afstand van den top in de schuine zijde moet deze kegel gesneden worden door een vlak, evenwijdig aan de basis, opdat de totale oppervlakken van elk der deelen, waarin de kegel wordt verdeeld, gelijk zijn? (Eindex. h. b. s., 1890).

1078. Op de as van een kegel, waarvan de hoogte gelijk is aan de middellijn van het grondvlak, is als middellijn een bol beschreven. Men vraagt, hoe groot het stuk van den bol is, dat buiten den kegel ligt, en hoe groot de stukken zijn, waarin het vlak van de doorsnede van kegel- en boloppervlak den bol verdeelt. (Eindex. h. b. s., 1891).

1079. Een bol met een straal R en een kegel met een hoogte 2 R en met den straal van het grondvlak R, zijn naast elkander op een vlak U geplaatst. Men vraagt op welken afstand van het vlak U men een vlak moet aanbrengen, evenwijdig aan vlak U, opdat de inhouden der deelen van beide lichamen tusschen deze vlakken gelijk zijn. (Eindex. h. b. s. 1892).

1080. In een halven bol (straal = R) beschrijft men een kubus zóó, dat de hoekpunten van het bovenvlak in het oppervlak van den halven bol liggen, terwijl het grondvlak van een kubus in het platte grensvlak van den halven bol ligt. Men vraagt 1°. de verhouding van de inhouden van den kubus en van de bolschijf, begrepen tusschen grond- en bovenvlak van den kubus; 2°. de verhouding van de ronde oppervlakken der lichamen, waarin het bovenvlak van den kubus — behoorlijk verlengd — den halven bol verdeelt. (Eindex. h. b. s., 1893).

1081. De top van een kegel valt samen met het middelpunt van een bol, terwijl het grondvlak van den kegel den bol raakt. Het stuk van den kegel, dat buiten den bol ligt, is even groot als dat van den bol, dat buiten den kegel valt. Hoe groot is het gemeenschappelijk stuk, in den straal van den bol uitgedrukt? (Eindex. h. b. s., 1894).

1082. Men heeft een vat in den vorm van een afgeknotten kegel, waarvan de afmetingen binnenwerks zijn: hoogte 6 dM., straal van het grondvlak 12 dM. en de straal van het bovenvlak 9 dM. Dit vat is tot op 1 dM. van den bovenrand gevuld met water. Men laat in het vat een lichaam zinken, dat de gedaante heeft van een bolsegment, waardoor het vat geheel gevuld wordt. Als de hoogte van het segment $3\frac{1}{4}$ dM. is, vraagt men den straal van den bol te berekenen, waaruit het segment gesneden is. (Eindex. h. b. s., 1895).

1083. In een bol is eén straal getrokken en op het midden van dien straal is een vlak loodrecht geplaatst, dat den bol in twee segmenten verdeelt. Men neemt het kleinste segment weg en vervangt het door een kegel, die hetzelfde grondvlak heeft als het segment. Op

welken afstand van het midden van den straal moet de top van den kegel geplaatst worden, opdat het ronde oppervlak van het lichaam, gevormd door kegel en bolsegment, samen gelijk is aan het oppervlak van den gegeven bol? (Eindex. h. b. s., 1895).

1084. Van een afgeknotte regelmatige tienzijdige pyramide is de ribbe van het grondvlak a; de opstaande zijvlakken maken hoeken van 60° met het grondvlak. Indien nu in de afgeknotte pyramide een bol beschreven kan worden, die alle zijvlakken raakt, hoe verhoudt zich dan de inhoud van dien bol tot dien van de afgeknotte pyramide? (Eindex. h. b. s., 1896).

1085. In een regelmatige vierzijdige pyramide, waarvan alle ribben a zijn, verbindt men het midden van een der ribben van het grondvlak met de middens van die opstaande ribben, welke deze ribben van het grondvlak kruisen. Hoe lang zijn deze verbindingslijnen en hoe groot is het totale oppervlak van het lichaam, dat aan de zijde van den top wordt afgesneden door een vlak, dat deze lijnen bevat? (Eindex. h. b. s., 1896).

1086. De top van een recht cirkelvormig kegelvlak, waarvan de as vertikaal is en de tophoek 60°, is naar beneden gekeerd. In deze holte wordt een bol met straal r geworpen en daarna zooveel water er opgegoten, totdat de bol juist onder water is. Hierna wordt de bol er uitgenomen, terwijl al het water in de holte komt. Hoe hoog komt dit water? (Eindex. h. b. s., 1897).

Ondersteld wordt, dat de bol tegen het kegelvlak oorspronkelijk waterdicht sloot.

1087. Door een diagonaal van het grondvlak van een kubus en het midden van een der ribben van het bovenvlak wordt een vlak gebracht. De ribbe van dien kubus is a. Hoe groot is de oppervlakte van de doorsnede en de inhoud van elk der deelen, waarin de kubus verdeeld wordt? (Eindex. h. b. s., 1897).

1088. Op de middellijn A B van een halven cirkel ($AB = 2R = 24$) neemt men twee punten C en D ($CD = h = 4$) en richt in die punten loodlijnen op A B op, die den omtrek respectievelijk in E en F snijden. Als de inhoud van het lichaam ontstaan door wenteling der figuur E A F (begrensd door boog E F en de koorden A E en A F) om A B 96π moet zijn, vraagt men A C te bepalen. (Eindex. h. b. s., 1898).

1089. Van een driezijdige pyramide A B C D kruisen de ribben A B en C D elkander rechthoekig. Men vraagt te bewijzen, dat de inhoud van die pyramide gelijk is aan het gedurig product van de ribben A B en C D en den afstand dier ribben. (Eindex. h. b. s., 1899).

1090. In een gelijkbeenig trapezium A B C D ($AB = CD$), waarin een cirkel beschreven is, trekt men de lijn, die de middens E en F der evenwijdige zijden B C en A D verbindt. Men laat de figuur A B E F

om de lijn E F wentelen, waardoor een bol en twee ringvormige lichamen ontstaan. Gevraagd de inhoud en het totale oppervlak van het kleinste dier ringvormige lichamen (Eindex. h. b. s., 1899).

1091. Een middellijn van een bol, welks straal R is, is hoogtelijn van een kegel, welks grondvlak eveneens R tot straal heeft en raakvlak is aan den bol. Men vraagt de verhouding van de inhouden van het deel van den kegel buiten den bol en van het deel van den bol buiten den kegel (Eindex. h. b. s., 1900).

1092. De middens van drie elkander kruisende ribben van een kubus worden twee aan twee verbonden. Den aldus gevormden driehoek beschouwt men als grondvlak van een pyramide, waarvan de top samenvalt met een hoekpunt van den kubus, dat niet met een der drie eerstgenoemde punten op een ribbe ligt. Men vraagt den inhoud en het oppervlak van die pyramide uit te drukken in de ribbe a van den kubus (Eindex. h. b. s., 1900).

1093. Als in een rechthoekigen boldriehoek een rechthoekszijde 90° en de aanliggende hoek 45° bedraagt, dan is de andere rechthoekszijde 45°.

1094. Als in een rechthoekigen boldriehoek de hypothenusa recht is, dan is elk der rechthoekszijden gelijk aan den overstaanden hoek.

1095. Als door een punt P drie rechten getrokken zijn en op elk daarvan een puntenpaar A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 aangenomen is, zoodanig, dat

$$P A_1 \times P A_2 = P B_1 \times P B_2 = P C_1 \times P C_2$$

is, dan liggen die zes punten op een bol.

1096. In een gegeven kegelvormigen bolsector een bol te construeeren, die het kegelvlak en het bolvormig oppervlak van den sector raakt.

*1097. Het vlak van den cirkel, die aan twee elkander snijdende bollen gemeen is, is het machtvlak der twee bollen.

*1098. Hoe kan het vorige vraagstuk toegepast worden om het machtvlak van twee bollen te construeeren, die elkander niet snijden?

1099. De meetkundige plaats der punten in de ruimte, welker afstanden tot twee gegeven punten een standvastige verhouding hebben, is een bolopppervlak, waarvan het middelpunt op de verbindingslijn dier punten ligt.

1100. In een gegeven vlak een punt te bepalen, waarvoor de afstanden tot twee gegeven punten een gegeven verhouding hebben en dat op een gegeven afstand van een ander gegeven vlak verwijderd is. Hoeveel punten voldoen aan de vraag?

1101. De meetkundige plaats der punten, die op gegeven afstanden

van twee snijdende vlakken liggen, is een rechte, die evenwijdig loopt met de doorsnede dier vlakken.

1102. Als P een willekeurig punt is, A B C D een viervlak en Z het zwaartepunt daarvan, dan is

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4PZ^2 + ZA^2 + ZB^2 + ZC^2 + ZD^2.$$

1103. Stelt men de oppervlakken der zijvlakken van een viervlak door a, b, c, d en de helft van het geheele oppervlak door s voor, dan zijn de stralen der in- en aangeschreven bollen van het viervlak

$$r = \frac{3\,I}{2\,s},\ r_a = \frac{3\,I}{2(s-a)}\ \text{enz.},$$

waarin I de inhoud van het viervlak beteekent.

1104. Van een rechthoekig viervlak zijn de drie onderling loodrechte ribben 3, 4 en 5 dM. lang. Bepaal de stralen van de in- en aangeschreven bollen.

1105. Van een rechthoekig viervlak zijn de drie onderling loodrechte ribben a, b, c. Bewijs, dat de straal van den omgeschreven bol $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ is.

1106. Hoe moet men een kubus door een plat vlak doen snijden, opdat de doorsnede een regelmatige zeshoek zij?

1107. Een vierzijdige pyramide heeft tot grondvlak een rechthoek, terwijl de hoogtelijn, uit den top neergelaten, in het snijpunt der diagonalen van den rechthoek uitkomt. Gevraagd door een der ribben van het grondvlak een vlak te brengen, dat het lichaam in twee gelijke deelen verdeelt.

1108. Als het middelpunt van den omgeschreven cirkel van een boldriehoek op een der zijden ligt, dan is de over die zijde liggende hoek gelijk aan de som der beide andere hoeken.

1109. Als een bol alle ribben van een viervlak raakt, dan zijn de drie sommen der overstaande ribben gelijk.

1110. Als een bol alle ribben van een viervlak raakt, dan is een raaklijn, uit een der hoekpunten van het viervlak aan den bol getrokken, gelijk aan het derde deel van de som der ribben, dit in dit hoekpunt uitkomen, verminderd met een zesde deel van de som der overige ribben.

1111. Wat is de meetkundige plaats der punten in de ruimte, waarvoor de som van de vierkanten der rechten, die zulk een punt met de hoekpunten van een viervlak verbinden, standvastig is?

1112. Als drie koorden van een bol door hetzelfde vaste punt gaan en twee aan twee loodrecht op elkander staan, dan heeft de som van de vierkanten der stukken een standvastige waarde.

1113. Als drie koorden van een bol door hetzelfde vaste punt van

den bol gaan en twee aan twee loodrecht op elkander staan, dan heeft de som van de vierkanten dier koorden een standvastige waarde.

1114. In en om een zelfden bol is een regelmatig achtvlak beschreven; hoe verhouden zich de inhouden en de oppervlakken dier lichamen?

1115. Om een recht driezijdig prisma is een bol beschreven. Hoe groot is de straal van dien bol, als de zijden van het grondvlak van het prisma 13, 14 en 15 cM. bedragen, terwijl de hoogte van dit lichaam 2 dM. is?

1116. Om een regelmatig viervlak is een bol beschreven. Bepaal het oppervlak en den inhoud van de segmenten, die van dezen bol door de zijvlakken van het viervlak na verlenging afgesneden worden.

1117. Hetzelfde vraagstuk voor een regelmatig twaalfvlak op te lossen.

1118. In elk hoekpunt van een regelmatig achtvlak wordt van dit lichaam door een plat vlak, dat loodrecht staat op de aldaar uitkomende lichaamsdiagonaal een zelfde stuk afgesneden, zóó dat het oppervlak van het overblijvende lichaam $\frac{1}{n}$ bedraagt van dat van het octaëder Hoe verhouden zich de inhouden dier lichamen?

1119. Als men alle zijvlakken van een regelmatig twaalfvlak, die aan een willekeurig gekozen zijvlak grenzen, buiten het lichaam verlengt, ontstaat een buiten het lichaam gelegen regelmatige vijfzijdige pyramide. Men vraagt den inhoud dezer pyramide uit te drukken in de ribbe a van het twaalfvlak.

1120. In een recht viervlak is het vierkant van het scheefhoekige opstaande zijvlak gelijk aan de som van de vierkanten der drie andere zijvlakken, vermeerderd of verminderd met het dubbel product van een der beide rechte zijvlakken met de projectie van het tweede rechte zijvlak op het eerste.

1121. Als een zijde van een driehoek in een vlak ligt, dan is de verhouding van het oppervlak der projectie van den driehoek op het vlak U tot het oppervlak van den driehoek gelijk aan de verhouding der loodlijnen, uit een willekeurig punt van het vlak van den driehoek op het vlak U en op het vlak van den driehoek getrokken.

1122. Bewijs, dat de vorige eigenschap ook geldt, als de driehoek met het vlak U slechts één hoekpunt gemeen heeft.

1123. Bewijs, dat de eigenschap in vraagstuk 1120 ook geldig blijft, als de driehoek geen enkel punt met het vlak U gemeen heeft. (Verg. vraagstuk 882).

1124. Het vierkant van het oppervlak van een willekeurigen driehoek is gelijk aan de som der vierkanten van de oppervlakken der projecties van den driehoek op drie onderling loodrechte vlakken.
